

Übungen zur Differentialgeometrie

(Winter 2023/24)

1. Übungsblatt (10.10.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 17.10.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 1.1. Ein Stab im $\mathbf{R}^3$ der Länge $\ell \in \mathbf{R}^+$ habe Anfangspunkt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und Endpunkt $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass die Menge M der möglichen Paare (x, y) (also die Menge der Lagen des Stabes im Raum) eine Untermannigfaltigkeit eines $\mathbf{R}^m$ ist. (Bem.: Dies würde schwieriger, wenn man den Stab als symmetrisch auffassen würde und Anfangs- und Endpunkt nicht unterscheiden würde.) (26 Punkte)

Übung 1.2. Sei $M \subset \mathbf{R}^2$ das Bild der Abbildung $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbf{R}^2, \vartheta \mapsto \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$. Überprüfen Sie, ob M eine Untermannigfaltigkeit ist. Tipp: Wie viele Zusammenhangskomponenten hat $M \setminus \{(0, 0)\}$ in jeder hinreichend kleinen Umgebung von $(0, 0)$? (26 Punkte)

Übung 1.3. Sei $O(n) := \{A \in \mathbf{R}^{n \times n} \mid A \cdot A^t = \text{id}_{\mathbf{R}^n}\}$.

a) Zeigen Sie, dass $O(n) \subset \mathbf{R}^{n \times n}$ eine Untermannigfaltigkeit ist. (Tipp: Berechnen Sie die Ableitung einer geeigneten Funktion f bei $A \in O(n)$ in Richtung $X(A^{-1})^t$ für beliebiges $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$).

b) Welche Dimension hat $O(n)$? (21+11 Punkte)

Übung 1.4. Zeigen Sie, dass das Produkt $M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$ zweier Untermannigfaltigkeiten M, N wieder eine Untermannigfaltigkeit ist. (16 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>