

Übungen zur Differentialgeometrie
(Winter 2023/24)
2. Übungsblatt (17.10.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 24.10.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 2.1. Die Kleinsche Flasche M sei (als topologischer Raum) der Quotient von $\mathbf{R}^2$ durch die Äquivalenzrelation $(s, t) \sim (s + 2\pi n, (-1)^n t + 2\pi m)$ $\forall n, m \in \mathbf{Z}$.

- a) Zeigen Sie, dass M die Struktur einer C^∞ -Mannigfaltigkeit trägt.
- b) Beweisen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot (r + \cos \psi) \\ \sin \varphi \cdot (r + \cos \psi) \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \psi \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \psi \end{pmatrix}$$

für $r > 1$ eine Einbettung der Kleinschen Flasche in den $\mathbf{R}^4$ ist.

(17+18 Punkte)

(Bemerkung: Eine Einbettung in den $\mathbf{R}^3$ gibt es nicht.)

Übung 2.2. Zeigen Sie, dass die Räume $\mathbf{P}^1\mathbf{R}$ und $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ diffeomorph zu den Sphären S^1 bzw. S^2 sind (analog ist $\mathbf{P}^1\mathbf{H}$ diffeomorph zu S^4) (Tipp: Verwenden Sie die stereographischen Projektionen der Sphären aus Ana II/III als Karten). (20 Punkte)

Übung 2.3. Beweisen Sie, dass die Abbildung $f : S^n \rightarrow \mathbf{P}^n\mathbf{R}, x \mapsto [x]$ surjektiv und ein lokaler Diffeomorphismus ist. Bestimmen Sie das Urbild jedes Punktes. (15 Punkte)

Übung 2.4. Zeigen Sie, dass in $\{A \in \mathbf{R}^{3 \times 3} \mid A^t = A, \operatorname{Tr} A = 1\} \cong \mathbf{R}^5$ die Matrizen mit $A^2 = A$ eine Untermannigfaltigkeit M bilden, die diffeomorph zu $\mathbf{P}^2\mathbf{R}$ ist. (30 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>