

Übungen zur Differentialgeometrie  
(Winter 2023/24)  
3. Übungsblatt (24.10.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 31.10.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

**Übung 3.1.** Seien  $\varphi, \psi$  die zwei Abbildungen

$$\begin{aligned}\varphi : ]-3, 3[ \times ]-5, 5[ &\rightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (3x + 4y, 4y) , \\ \psi : ]1, 3[ \times ]1, 5[ &\rightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (2x, x^2 + y) .\end{aligned}$$

Überprüfen Sie, dass  $\varphi, \psi$  mit dem passend eingeschränkten Bildbereich Karten des  $\mathbf{R}^2$  sind, und berechnen Sie, wann zwei Tangentialvektoren  $[(\varphi, v)], [(\psi, w)]$  des  $\mathbf{R}^2$  gleich sind. (10+10 Punkte)

**Übung 3.2.** Konstruieren Sie ein nullstellenfreies Vektorfeld auf  $S^{2n-1}$  für  $n \in \mathbf{Z}^+$ . (Tipp: Verwenden Sie für die Konstruktion nicht die stereographischen Projektionen, sondern die Standard-Einbettung  $S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$ ). (25 Punkte)

**Übung 3.3.** Verifizieren Sie noch einmal mit Hilfe der stereographischen Projektionen, dass  $TS^1$  und  $S^1 \times \mathbf{R}$  diffeomorph sind. (Tipp: Bei der Konstruktion des Diffeomorphismus kann es helfen, sich klarzumachen, auf welchen Vektor in  $T\mathbf{R}$  ein Tangentialvektor der Länge 1 des Kreises abgebildet wird.) (25 Punkte)

**Übung 3.4.** Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, falls es einen Atlas gibt, für den die Determinanten der Jacobi-Matrizen der Kartenwechsel nur positive Werte annehmen.

- a) Zeigen Sie, dass die Kleinsche Flasche (vgl. Übung 2.1(1)) nicht orientierbar ist. Verwenden Sie den  $C^\infty$ -Atlas

$$\{\varphi_{I,x} : (x + I^2)/ \sim \xrightarrow{\text{id}} (x + I^2) \mid I \overset{\text{offen}}{\subset} ]0, 2\pi[, x \in \mathbf{R}^2\}.$$

- b) Welches ist das maximale  $n \in \mathbf{N}$ , für das Vektorfelder  $X_1, \dots, X_n$  auf der Kleinschen Flasche  $M$  existieren, so dass an jedem Punkt  $p \in M$  die Vektoren  $X_{1|p}, \dots, X_{n|p}$  linear unabhängig sind? (15+15 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>