

Übungen zur Differentialgeometrie

(Winter 2023/24)

4. Übungsblatt (31.10.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 7.11.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Auf $M = \mathbf{R}^n$ entspricht der Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x_j}$ (also eine Derivation) dem Vektorfeld $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$, und wir werden ersteren auch als Notation für das Vektorfeld verwenden.

Übung 4.1. Seien X, Y, Z die Vektorfelder auf $\mathbf{R}^3$

$$X := z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y := x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z := y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

und V sei der von X, Y, Z aufgespannte Unterraum von $\Gamma(\mathbf{R}^3, T\mathbf{R}^3)$. Sei $g \in \mathbf{O}(3)$ eine Isometrie des euklidischen Vektorraums für die kanonische euklidische Metrik. Zeigen Sie $g_*V = V$. (26 Punkte)

Übung 4.2. Sei $M := \mathbf{R}^2/(2\pi\mathbf{Z})^2$ ein zweidimensionaler Torus und $X, Y \in \Gamma(M, TM)$ mit

$$X_{(x)} := \frac{\partial}{\partial x} + \cos(2y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_{(x)} := \sin^2(x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(x+y) \frac{\partial}{\partial y}$$

(bzw. in anderen Schreibweise $X_{(x)} := \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2xy \end{pmatrix}$, $Y_{(x)} := \begin{pmatrix} \sin^2 x \\ \cos(x+y) \end{pmatrix}$). Sei für $n \in \mathbf{N}$

$$g: M \rightarrow \mathbf{R}, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \cos(x + ny).$$

Berechnen Sie $L_X g$ und $L_Y g$. (21 Punkte)

Übung 4.3. Sei mit den Bezeichnungen von Übung 4.2 $f: M \rightarrow M, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Berechnen Sie f_*X und f_*Y . (21 Punkte)

Übung 4.4. In dieser Aufgabe wird noch eine weitere Beschreibung von $T_p M$, genauer des Dualraums $T_p^* M$ behandelt. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$. In der $\mathbf{R}$ -Algebra der $\mathbf{R}$ -wertigen Funktionen $C^\infty(M, \mathbf{R})$ sei $\mathcal{I}_p$ das Ideal der Funktionen, die auf einer offenen Umgebung U von p verschwinden. Die Elemente von $\mathcal{F}_p := C^\infty(M, \mathbf{R})/\mathcal{I}_p$ heißen Keime von $\mathbf{R}$ -wertigen Funktionen. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{J}_p := \{[f] \in \mathcal{F}_p \mid f(p) = 0\}$ ist wohldefiniert und ein Ideal in $\mathcal{F}_p$.

b) $\mathcal{J}_p/(\mathcal{J}_p)^2 \rightarrow T_p^* M, [f] \mapsto T_p f$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

(16+16 Punkte)

(Ein Ideal $\mathfrak{a}$ eines kommutativen Rings $(R, +, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(R, +)$ mit $\mathfrak{a} \cdot R \subset \mathfrak{a}$).

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>