

Übungen zur Differentialgeometrie
(Winter 2023/24)
5. Übungsblatt (7.11.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 14.11.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 5.1. Sei $M = \mathbf{R}^n$ und $A := (a_k)_{k=1}^n, B := (b_k)_{k=1}^n \in \Gamma(M, TM)$ mit $a_j, b_j \in C^\infty(M, \mathbf{R}) \forall j$. Zeigen Sie

$$[A, B] = \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_k}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right)_{k=1}^n.$$

Für Vektorfelder auf $\mathbf{R}^n$ hilft dabei die Notation $A = (a_k)_{k=1}^n = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, wobei die Vektoren der kartesischen Basis als $\frac{\partial}{\partial x_k} := (\delta_{jk})_{j=1}^n$ für $k = 1, \dots, n$ geschrieben werden: $\frac{\partial}{\partial x_1} := (1, 0, \dots, 0)^t$ usw. (30 Punkte)

Übung 5.2. Berechnen Sie $[X, Y]$ für die Vektorfelder

$$X_{(x)} := \frac{\partial}{\partial x} + \cos(2y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_{(x)} := \sin^2(x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(x+y) \frac{\partial}{\partial y}$$

aus Übung 4.2.

(15 Punkte)

Übung 5.3. Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes

$$Y \in \Gamma(\mathbf{R}^+, T\mathbf{R}^+) , \quad x \mapsto \frac{1}{3x^2} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Wie groß kann der Definitionsbereich von Φ maximal gewählt werden?

(25 Punkte)

Übung 5.4. Seien V, X, Y, Z wie in Übung 4.1 und

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow \mathbf{R}^3, \\ aX + bY + cZ &\mapsto (a, b, c). \end{aligned}$$

Beweisen Sie $\varphi([A, B]) = \varphi(A) \times \varphi(B)$ für $A, B \in V$ und das Kreuzprodukt $\times$ auf $\mathbf{R}^3$, das für $u, v, w \in \mathbf{R}^3$ durch $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$ definiert ist.

(30 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>