

Übungen zur Differentialgeometrie
(Winter 2023/24)
6. Übungsblatt (14.11.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 21.11.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 6.1. Zeigen Sie, dass $G := \mathbf{R}^\times \times \mathbf{R}$ mit der Verknüpfung

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa', b + ab')$$

eine Lie-Gruppe ist. Beweisen Sie, dass G als Gruppe zur Gruppe der affinen Transformationen der reellen Geraden (d.h. der Transformationen der Form $x \mapsto ax + b$) isomorph ist. Bestimmen Sie die linksinvarianten Vektorfelder und damit die (via ρ induzierte) Lieklammer auf $T_e G = \mathbf{R}^2$. (10+5+20 Punkte)

Übung 6.2. Die symplektische Gruppe $\mathbf{Sp}(n)$ ist folgende Untergruppe von $\mathbf{U}(2n)$:

$$\mathbf{Sp}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \in \mathbf{U}(2n) \mid A, B \in \mathbf{C}^{n \times n} \right\}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{Sp}(n)$ eine Lie-Gruppe ist.
- b) Bestimmen Sie $T_e \mathbf{Sp}(n) \subset T_e \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{n \times n}$ als Teilmenge. Wie groß ist $\dim \mathbf{Sp}(n)$?

Bem.: $\mathbf{Sp}(n)$ lässt sich auch als (links-)H-lineare Isometriegruppe des $\mathbf{H}^n$ auffassen. (15+15 Punkte)

Übung 6.3. Die Heisenberg-Gruppe $H \subset \mathbf{GL}(3, \mathbf{R})$ besteht aus den oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale.

- a) Berechnen Sie die Lie-Algebra $\mathfrak{h}$.
- b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{u} := [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{[a, b] \mid a, b \in \mathfrak{h}\}$ eine echte Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{h}$ ist und dass

$$[[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{h}] = 0.$$

- c) Berechnen Sie $\exp X$ für $X \in \mathfrak{h}$ und folgern Sie, dass $\exp$ ein Diffeomorphismus ist. (10+10+15 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>