

Übungen zur Differentialgeometrie
(Winter 2023/24)
7. Übungsblatt (21.11.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 28.11.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 7.1. a) Sei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ und $x := a^2 + bc$. Zeigen Sie

$$\exp_{\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})} X = \begin{cases} \text{Id} \cdot \cosh \sqrt{x} + X \cdot \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} & x \geq 0 \\ \text{Id} \cdot \cos \sqrt{-x} + X \cdot \frac{\sin \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & x < 0. \end{cases} \text{ für } x \geq 0.$$

b) Zeigen Sie, dass $\exp_{\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})}$ nicht surjektiv ist. (Tipp: Welche Werte nimmt $\text{Tr} \exp X$ an?)

c) Zeigen Sie, dass $\exp_{\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})}$ nicht injektiv ist. (25+5+5 Punkte)

Übung 7.2. Zeigen Sie (z.B. mit Hilfe der Jordan-Normalform), dass $\exp_{\mathbf{GL}(2, \mathbf{C})}$ surjektiv ist. (15 Punkte)

Übung 7.3. Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe, $Z := \{g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg\}$ ihr Zentrum und $\mathfrak{z} := \ker \text{ad}$. Zeigen Sie $Z = \ker \text{Ad}$ und beweisen Sie, dass die Exponentialabbildung $\mathfrak{z}$ surjektiv auf $Z \cap \exp_G(\mathfrak{g})$ abbildet. (10+15 Punkte)

Übung 7.4. Sei $M^n \subset \mathbf{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Lokal existiert $f : U \rightarrow \mathbf{R}^k$ mit $f^{-1}(\{0\}) = M \cap U$. Damit identifizieren wir $T_p M$ mit $\ker T_p f \subset T_p \mathbf{R}^{n+k} \cong \mathbf{R}^{n+k}$. Bezüglich des kanonischen Skalarproduktes auf $\mathbf{R}^{n+k}$ sei

$$N_p := \{v \in T_p \mathbf{R}^{n+k} \mid v \perp T_p M\} \quad (p \in M).$$

Zeigen Sie, dass das Normalenbündel

$$N := \{(p, N_p) \mid p \in M\} \rightarrow M, (p, N_p) \mapsto p$$

ein Vektorbündel ist (Tipp: Betten Sie N als Untermannigfaltigkeit ein). (25 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>