

Übungen zur Differentialgeometrie  
(Winter 2023/24)  
8. Übungsblatt (28.11.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 5.12.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

**Übung 8.1.** Sei  $M = S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$  und  $N$  das Normalenbündel aus Aufgabe 7.4.

a) Beweisen Sie

$$N = \{(p, v) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \mid p \in S^n, v \in \mathbf{R} \cdot p\}$$

und dass  $N$  isomorph zum trivialen  $\mathbf{R}$ -Linienbündel  $\mathcal{O}$  ist.

b) Zeigen Sie, dass  $TS^n \oplus \mathcal{O}$  isomorph zum trivialen  $\mathbf{R}^{n+1}$ -Bündel  $\mathcal{O}^{\oplus(n+1)}$  ist. (10+10 Punkte)

**Übung 8.2.** Seien  $E, F$  Vektorbündel auf  $M$  mit Übergangsabbildungen  $g_{jk}, h_{lm}$ . Beschreiben Sie die Übergangsabbildungen von  $E^*, E \oplus F, \text{Hom}(E, F)$  und  $E \otimes F$ . (7+5+7+6 Punkte)

**Übung 8.3.** Sei  $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  oder  $\mathbf{H}$ .  $L$  sei der Quotient von  $K^{n+1} \setminus \{0\} \times K$  durch die Relation  $(\mathbf{x}, \lambda) \sim (\mu\mathbf{x}, \lambda\mu^{-1})$  für jedes  $\mu \in K^\times$ . Zeigen Sie, dass die Projektion  $\pi : L \rightarrow \mathbf{P}^n K, [(\mathbf{x}, \lambda)] \mapsto [\mathbf{x}]$  ein Vektorbündel ist (das *tautologische Linienbündel* des  $\mathbf{P}^n K$ ). (25 Punkte)

**Übung 8.4.** Sei  $\iota : S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  die kanonische Einbettung und  $\varphi_1, \varphi_2$  seien die stereographischen Projektionen. Das euklidische Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist eine Bilinearform auf  $T\mathbf{R}^{n+1}$ , also ist  $g := \langle T\iota(\cdot), T\iota(\cdot) \rangle \in T^*S^n \otimes T^*S^n$ . Bestimmen Sie  $(\varphi_j^{-1})^*g$  für  $j = 1, 2$ . (30 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>