

Übungen zur Differentialgeometrie
(Winter 2023/24)
9. Übungsblatt (5.12.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 12.12.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 9.1. Sei $M := \mathbf{R}^2$ und $X, Y \in \Gamma(M, TM)$ mit

$$X_{(x,y)} := \frac{\partial}{\partial x} + \cos(2y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_{(x,y)} := \sin^2(x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(x+y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sei $f : M \rightarrow M, (x, y) \mapsto (y, x)$ und $\omega \in \Gamma(M, \otimes T^*M)$ mit

$$\omega_{(x,y)} := xy \cdot dx \otimes dy + e^y \cdot (4dx + dy) + \cos x.$$

Berechnen Sie $\omega \otimes \omega$, $f^*\omega$, $\iota_X \omega$, $\iota_X(\omega \otimes \iota_Y \omega)$, $L_X \omega$ und $L_X(Y \otimes \omega)$.
(5+5+5+5+7+8 Punkte)

Übung 9.2. Stellen Sie für endlich-dimensionale Vektorräume V, W, Z folgende Abbildungen als Kontraktionen dar:

- a) Die Komposition $\text{Hom}(V, W) \otimes \text{Hom}(W, Z) \rightarrow \text{Hom}(V, Z)$, $\varphi \otimes \psi \mapsto \psi \circ \varphi$.
- b) Die Auswertungsabbildung $\text{Hom}(V, W) \otimes V \rightarrow W$, $\varphi \otimes v \mapsto \varphi(v)$.
- c) Die Spur $\text{Tr} : \text{End } V \rightarrow \mathbf{R}$. (10+10+10 Punkte)

Übung 9.3. a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{su}(n) \times \mathfrak{su}(n) \rightarrow \mathbf{R}, (X, Y) \mapsto \text{Tr}(X\bar{Y}^t)$ ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(n)$ ist. Beweisen Sie, dass $\text{Ad} : \mathbf{SU}(n) \rightarrow \text{End}(\mathfrak{su}(n))$ Werte in den Isometrien für dieses Skalarprodukt annimmt.

- b) Interpretieren Sie Ad für $n = 2$ als eine Abbildung von $\mathbf{SU}(2)$ nach $\mathbf{SO}(3)$. Bestimmen Sie den Kern dieser Abbildung. (20+15 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>