

Übungen zur Differentialgeometrie
(Winter 2023/24)
10. Übungsblatt (12.12.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 19.12.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 10.1. Seien M, X, Y wie vorher und $\eta \in \Gamma(M, \Lambda^\bullet T^*M)$ mit

$$\eta_{(x,y)} := e^x dx \wedge dy + xy(3dx + dy) + \cos y.$$

Berechnen Sie $\eta \wedge \eta$, $\iota_X \eta$, $\iota_X(\eta \wedge \iota_Y \eta)$, $L_X \eta$, $d\eta$, $d(\iota_X \eta)$ und $\iota_X d\eta$.
(5+5+5+5+5+5+5 Punkte)

Übung 10.2. Sei $M^m \subset \mathbf{R}^{m+1}$ eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie $\Lambda^{m+1} \mathbf{R}^{m+1}|_M \cong N \otimes \Lambda^m TM$ mit dem Normalenbündel N .
(20 Punkte)

Übung 10.3. Zeigen Sie für das innere Produkt $\iota_X : \mathfrak{A}^q(M) \rightarrow \mathfrak{A}^{q-1}(M)$ mit einem Vektorfeld X und $\alpha \in \mathfrak{A}^1(M)$, $\omega \in \mathfrak{A}^q(M)$:

$$\iota_X(\alpha \wedge \omega) + \alpha \wedge \iota_X \omega = \alpha(X) \cdot \omega.$$

(20 Punkte)

Übung 10.4. Zeigen Sie für Vektorfelder X, Y und das innere Produkt $\iota_Y : \mathfrak{A}^\bullet(M) \rightarrow \mathfrak{A}^\bullet(M)$: Als Gleichung von Operatoren auf $\mathfrak{A}^\bullet(M)$ gilt

$$L_X \circ \iota_Y - \iota_Y \circ L_X = \iota_{[X,Y]}.$$

(25 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>