

Übungen zur Differentialgeometrie  
(Winter 2023/24)  
11. Übungsblatt (19.12.2023)

Abgabe der Lösungen Dienstag, 9.1.2024, bis 10:30 in der Vorlesung.

**Übung 11.1.** Die de Rham-Kohomologie einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist die Familie von  $\mathbf{R}$ -Vektorräumen

$$H^q(M) := (\ker d|_{\mathfrak{A}^q(M)}) / (\operatorname{im} d|_{\mathfrak{A}^{q-1}(M)}) \quad (q \in \mathbf{N}^+)$$

und  $H^0(M) := \ker d|_{\mathfrak{A}^0(M)}$ . Zeigen Sie

- a)  $H^q(M) = 0$  für alle  $q > \dim M$ .
- b)  $H^0(M) \cong \mathbf{R}$ .
- c) Das äußere Produkt  $\wedge$  auf  $\mathfrak{A}^\bullet(M)$  induziert eine Ringstruktur auf

$$H^\bullet(M) := \bigoplus_q H^q(M) .$$

- d) Sei  $f \in C^\infty(M, N)$  für zwei Mannigfaltigkeiten  $M, N$ . Dann induziert der pull-back  $f^* : \mathfrak{A}^\bullet(N) \rightarrow \mathfrak{A}^\bullet(M)$  einen Ring-Homomorphismus  $f^* : H^\bullet(N) \rightarrow H^\bullet(M)$ .  
(7+10+9+9 Punkte)

Bem.: Mit Hilfe der harmonischen Analysis kann man zeigen, dass die Kohomologie von kompakten Mannigfaltigkeiten endlich-dimensional ist.

**Übung 11.2.** Sei  $\alpha \in \mathfrak{A}^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ ,  $\alpha = f \cdot dx$  mit  $f \in C^\infty(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ . Zeigen Sie mit einer Stammfunktion von  $f$  auf  $[0, 1]$ , dass  $\alpha = c \cdot dx + dF$  mit  $c \in \mathbf{R}$  und  $F \in C^\infty(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ . Bestimmen Sie damit  $(H^\bullet(\mathbf{R}/\mathbf{Z}), +, \wedge)$  als  $\mathbf{R}$ -Algebra.  
(25 Punkte)

**Übung 11.3.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $X \in \Gamma(M, TM)$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $L_X$  die Nullabbildung auf der Kohomologie induziert.
- b) Sei  $\omega \in \mathfrak{A}^2(M)$  geschlossen und  $X$  habe einen globalen Fluss, so dass  $\forall t \in \mathbf{R} : \Phi_t^{X*} \omega = \omega$ . Zeigen Sie, dass es lokal auf  $M$  eine reell-wertige Funktion  $f$  gibt mit  $\iota_X \omega = df$ .  
(15+25 Punkte)

Bemerkung: Teil (2) tritt in der Hamiltonschen Mechanik mit symplektischer Form  $\omega = \sum dp_j \wedge dq_j$ , Hamiltonischem Fluss und Hamilton-Funktion  $f = H$  auf. Für Teil (2) benötigen Sie das Poincaré-Lemma (Ana III, Satz 3.56):  
 $H^q(U) = \begin{cases} \mathbf{R} & q=0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$  für  $U \subset \mathbf{R}^n$  sternförmig.

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>

Frohes Fest und Guten Rutsch!