# Übungen zur Differentialgeometrie

(Winter 2023/24)

## 12. Übungsblatt (9.1.2024)

Abgabe der Lösungen Dienstag, 16.1.2024, bis 10:30 in der Vorlesung.

**Übung 12.1.** *Sei* $G = \mathbf{SO}(k)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k)$ *und* $g_{\mathrm{id}}(A, B) := -\operatorname{Tr} AB$ *für* $A, B \in \mathfrak{g}$. *Beweisen Sie*

*a)* $g_{\mathrm{id}}$ *ist ein euklidisches Skalarprodukt auf* $\mathfrak{g}$ *und invariant unter Konjugation mit Matrizen aus* $G$.

*b)* $g \in \Gamma(G, T^*G \otimes T^*G)$ *definiert durch* $g_h := (L_{h^{-1}})^* g_{\mathrm{id}}$ *bei* $h \in G$ *ist eine Riemannsche Metrik auf* $G$.

*c) Für* $k \in G$ *ist* $(L_k)^* g = g$ *und* $(R_k)^* g = g$ *(d.h. Multiplikation von rechts oder links mit* $k$ *ist eine Isometrie). (6+11+15 Punkte)*

**Übung 12.2.** *Sei* $\pi : \mathcal{L} \to M$ *ein* $\mathbf{R}$*-Linienbündel mit einer Metrik* $h$.

*a) Sei* $N := \{s \in \mathcal{L}_p \,|\, p \in M, h(s, s) = 1\}$. *Zeigen Sie, dass* $\pi_1 := \pi_{|N}$ *eine 2-fache Überlagerung ist.*

*b) Beweisen Sie, dass* $\pi_1^* \mathcal{L}$ *ein triviales Bündel ist. (20+15 Punkte)*

*Bemerkung: Dies zeigt, dass das Auftrennen eines Moebiusbandes in der Mitte einen Zylinder ergibt.*

**Übung 12.3.** *Sei* $H := \{z \in \mathbf{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}$ *die* ***obere Halbebene*** *mit der Riemannschen Metrik* $g = \frac{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{eukl.}}}{(\operatorname{Im} z)^2}$ *für die euklidische Metrik* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{eukl.}}$ *auf* $\mathbf{R}^2$.

*a) Zeigen Sie, dass* $H$ *isometrisch zur hyperbolischen Ebene ist.*

*b) Beweisen Sie, dass* $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ *durch* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}$ *auf* $H$ *durch Isometrien operiert. (20+13 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html`