

Übungen zur Differentialgeometrie
(Winter 2023/24)
13. Übungsblatt (16.1.2024)

Abgabe der Lösungen Dienstag, 23.1.2024, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 13.1. Sei E ein Vektorbündel mit Metrik h . Ein Zusammenhang ∇ auf E heißt metrisch, falls

$$\forall s_1, s_2 \in \Gamma(M, E), X \in \Gamma(M, TM) : X \cdot (h(s_1, s_2)) = h(\nabla_X s_1, s_2) + h(s_1, \nabla_X s_2).$$

Zeigen Sie, dass E mindestens einen metrischen Zusammenhang trägt, indem Sie einen beliebigen Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ wählen und $\nabla := \tilde{\nabla} + \frac{1}{2}h^{-1}\tilde{\nabla}h$ setzen (wobei $h^{-1}\nabla h \in \text{End } E$ durch $h(\cdot, (h^{-1}\tilde{\nabla}_X h)\cdot) := \tilde{\nabla}_X h$ für $X \in TM$ definiert ist). (25 Punkte)

Übung 13.2. Sei $\mathcal{L} \rightarrow M$ ein $\mathbf{R}$ -Linienbündel mit einer Metrik h . Zeigen Sie, dass es auf $\mathcal{L}$ einen eindeutig bestimmten metrischen Zusammenhang ∇ gibt. (Bem.: Das geht sehr elementar ohne Übung 13.1). (20 Punkte)

Übung 13.3. Sei $\mathcal{L}$ ein $\mathbf{C}$ -Linienbündel über einer Mannigfaltigkeit M und ∇ ein ($\mathbf{C}$ -linearer) Zusammenhang auf $\mathcal{L}$.

a) Zeigen Sie $\nabla^{\text{End}(\mathcal{L})} = h^{-1} \circ d \circ h$ mit der kanonischen Identifikation $h : \text{End}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\cong} M \times \mathbf{C}, \sigma \otimes s \mapsto \sigma(s)$. Diesen Isomorphismus werden wir im Rest der Aufgabe nicht mehr hervorheben.

b) Zeigen Sie, dass die Krümmung $\Omega \in \mathfrak{A}^2(M)$ von ∇ geschlossen ist. (15+10 Punkte)

Übung 13.4. Zeigen Sie im Kontext von Übung 13.3 weiter:

a) Sei $\tilde{\nabla}$ ein weiterer Zusammenhang auf $\mathcal{L}$ mit Krümmung $\tilde{\Omega}$. Beweisen Sie, dass $\Omega - \tilde{\Omega}$ exakt ist. Somit induziert $\mathcal{L}$ also kanonisch ein Element $c_1(\mathcal{L}) := [\frac{-1}{2\pi i}\Omega] \in H^2(M) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, die **erste Chern-Klasse** von $\mathcal{L}$.

b) Sei $\text{Pic}(M)$ die Menge der Isomorphieklassen von $\mathbf{C}$ -Linienbündeln auf M . Dann bildet $\text{Pic}(M)$ mit $\otimes$ als Produkt und der Dualisierung $*$ als Inversenbildung eine abelsche Gruppe. Beweisen Sie, dass $c_1 : \text{Pic}(M) \rightarrow H^2(M) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Bem.: Aus derartigen charakteristischen Klassen kann man auch zahlwertige Invarianten gewinnen, z.B. den Grad $\deg \mathcal{L} := \int_M c_1(\mathcal{L})^{\dim M/2} \in \mathbf{C}$ für geradedimensionales M . (15+15 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023-24/Vorlesung.html>