Übungen zur Funktionentheorie
(Sommer 2023)
1. Übungsblatt (4.4.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 1.1. *Berechnen Sie*

$$\frac{7+4i}{2-i}, \qquad \frac{-2-i}{2-4i}, \qquad (3-2i)^3, \qquad e^{4\pi i/3}, \qquad |3-4i|$$

möglichst weit vereinfacht in der Gestalt $x+iy$. *(4+4+4+4+4 Punkte)*

Übung 1.2. *Die* Quaternionen *seien die Teilmenge*

$$\mathbf{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbf{C} \right\} \subset \mathbf{C}^{2\times 2}.$$

Zeigen Sie mit einem möglichst kurzen Beweis, dass $\mathbf{H}$ *ein Ring mit 1 ist und alle Elemente von* $\mathbf{H}\setminus\{0\}$ *invertierbar sind (i.e.* $\mathbf{H}$ *ist ein* Schiefkörper*).* *(25 Punkte)*

Übung 1.3. *Überprüfen Sie, an welchen Stellen folgende Abbildungen komplex differenzierbar sind, und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung dort.*

$$f_1 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto \bar{z}(z-2), \qquad f_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, x+iy \mapsto x^3y^2 + ix^2y^3.$$

(15+15 Punkte)

Übung 1.4. *Sei* $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto a_n z^n + \cdots + a_0$ *ein Polynom mit* $n \geq 1$, $\forall k : a_k \in \mathbf{C}$ *und* $a_n \neq 0$.

a) Finden Sie ein $R > 0$ *mit* $\forall k < n : |z| \geq R \Rightarrow |a_k z^k| \leq \frac{1}{n+1}|a_n z^n|$.

b) Folgern Sie mit (a), dass

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbf{R}^+ : |z| \geq R \Rightarrow C_1|z|^n \geq |P(z)| \geq C_2|z|^n.$$

c) Beweisen Sie $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$. *(11+10+4 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html`