Übungen zur Funktionentheorie

(Sommer 2023)

2. Übungsblatt (11.4.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 2.1. *Sei $f : U \to V$ holomorph und zweimal stetig reell differenzierbar, und sei $\varphi : V \to \mathbf{C}$ zweimal stetig reell differenzierbar. Beweisen Sie*

$$\Delta(\varphi \circ f) = |f'|^2 \, (\Delta\varphi \circ f) \ .$$

(25 Punkte)

Übung 2.2. *Zeigen Sie, dass die Cauchy-Riemann-Gleichungen für die Funktion $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $x + iy \mapsto \sqrt{|xy|}$ bei $z = 0$ erfüllt sind, dass die Funktion dort aber nicht komplex differenzierbar ist.* *(25 Punkte)*

Übung 2.3. *a) Sei $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph. Beweisen Sie, dass dann auch $g : \bar{D} \to \mathbf{C}, z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ holomorph ist.*

b) Nach Analysis I, Def. 3.27 ist $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ für alle $z \in \mathbf{C}$. Bestimmen Sie alle Nullstellen von $\cos, \sin$. Dabei kann es hilfreich sein, zunächst $|e^{x+iy}|$ zu berechnen. *(10+15 Punkte)*

Übung 2.4. *Sei $u : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $x + iy \mapsto x^2 + axy + by^2$. Finden Sie alle $a, b \in \mathbf{R}$, für die es eine Funktion $v : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ gibt, mit der $f := u + iv$ holomorph wird.* *(25 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html`