Übungen zur Funktionentheorie
(Sommer 2023)
3. Übungsblatt (18.4.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 3.1. *Berechnen Sie die Integrale über den Halbkreis* $\gamma : [0, \pi] \to \mathbf{C}$, $t \mapsto e^{it}$ *von*

$$a)\ \operatorname{Re} z, \qquad b)\ |z|, \qquad c)\ z^n\ (n \in \mathbf{Z}).$$

(7+7+7 Punkte)

Übung 3.2. *Seien* $D_1, D_2 \subset \mathbf{C}$ *Gebiete, für die* $D_1 \cap D_2$ *ebenfalls zusammenhängend ist. Beweisen Sie, dass eine Funktion* f *genau dann auf* $D_1 \cup D_2$ *eine Stammfunktion hat, wenn sie auf* D_1 *und auf* D_2 *eine hat. (12 Punkte)*

Übung 3.3. *Sei* $f \in \mathcal{O}(U)$ *holomorph und* f' *sei stetig. Seien* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $\varepsilon > 0$, $H \in C^2(]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\times]a-\varepsilon, b+\varepsilon[, U)$. *Es gelte*

- *a) es gibt* $z_0, z_1 \in U$ *mit* $\forall s : H(s, a) = z_0, H(s, b) = z_1$
- *b) oder* $\forall s : H(s, a) = H(s, b)$.

Beweisen Sie ohne Verwendung von Stammfunktionen

$$\int_{H(s,\cdot)_{|[a,b]}} f(z)\, dz \equiv \text{const.}$$

Was passiert im Beweis, wenn f *nur reell stetig differenzierbar ist?*
(30+7 Punkte)

Dabei können Sie folgenden Satz aus der Ana II verwenden:
Kor. 3.31 (Ana II). *Sei* $I = [a, b]$, $U \subset \mathbf{R}^k$ *offen,* $f \in C^0(I \times U, \mathbf{R}^n)$ *und* $D_{\mathbf{R}^k} f$ *existiere und sei stetig auf* $I \times U$. *Dann ist* $F : U \to \mathbf{R}^n$, $\kappa \mapsto \int_a^b f(t, \kappa)\, dt$ C^1 *und* $DF_{|\kappa} = \int_a^b D_\kappa f_{|(t,\kappa)}\, dt$.

Übung 3.4. *Seien* P, Q *Polynome mit* $\deg Q \geq \deg P + 2$. *Seien* $z_0 \in \mathbf{C}$ *und* $r > 0$ *so, dass alle Nullstellen von* Q *in der offenen Scheibe* $B_r(z_0)$ *liegen. Sei* $\partial B_r(z_0)$ *der im mathematischen Drehsinn durchlaufene Rand dieser Scheibe. Zeigen Sie mit Übung 3.3 und mit Übung 1.4*

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0.$$

(30 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html`