

Übungen zur Funktionentheorie
(Sommer 2023)
4. Übungsblatt (25.4.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 4.1. *Geben Sie zwei Gebiete $D_1, D_2 \subset \mathbf{C}$ an und eine Funktion $f : D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbf{C}$, die auf $D_1 \cup D_2$ keine Stammfunktion hat, aber auf D_1 und D_2 .* (15 Punkte)

Übung 4.2. *Sei $c_1(t) := ae^{it}$ und $c_2(t) := a \cos t + ib \sin t$ für $a, b > 0$ und $t \in [0, 2\pi]$. Beweisen Sie mit Hilfe dieser Wege und der Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$, dass*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

(25 Punkte)

Übung 4.3. *1) Sei f holomorph auf einer Umgebung von $\overline{B_r(0)}$ und $w \in \mathbf{C} \setminus \overline{B_r(0)}$. Berechnen Sie*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

2) Berechnen Sie mit Hilfe der Formeln von Cauchy

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)} dz.$$

(10+20 Punkte)

Übung 4.4. *Zeigen Sie,*

- a) dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ auf $B_1(0) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ gegen eine holomorphe Funktion f konvergiert,*
- b) dass für jede rationale Zahl $t \in \mathbf{Q}$ gilt $\lim_{r \rightarrow 1^-} |f(re^{2\pi i t})| = \infty$*
- c) und dass es keine stetige Funktion $g : G \rightarrow \mathbf{C}$ auf einem Gebiet $G \supset B_1(0)$, $G \neq B_1(0)$ gibt mit $g|_{B_1(0)} = f$.* (10+10+10 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html>