Übungen zur Funktionentheorie

(Sommer 2023)

5. Übungsblatt (2.5.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 5.1. *Beweisen oder widerlegen Sie, dass es eine holomorphe Funktion* $f : B_2(0) \to \mathbf{C}$ *gibt mit* $\forall n \in \mathbf{Z}^+ : f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{n}$. *(17 Punkte)*

Übung 5.2. *Für* $z \in \mathbf{C} \setminus \{2\pi i \mathbf{Z}\} \cup \{0\}$ *sei* $F_0(z) := \frac{z}{e^z - 1}$.

a) Definiere durch $F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ *in einer Umgebung von 0 die Folge der Bernoulli-Zahlen* $(B_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$. *Zeigen Sie mit der Relation* $(e^z - 1)F_0(z) = z$ *die Rekursionsformel*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0 \qquad \text{(für } n > 1\text{) und} \qquad B_0 = 1.$$

b) Zeigen Sie $B_{2k+1} = 0$ *für* $k > 0$. *(22+7 Punkte)*

Übung 5.3. *a) Zeigen Sie*

$$z \cot z = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{(-4)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \tan z = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{(-1)^n (4^n - 16^n) z^{2n-1}}{(2n)!}$$

in einer Umgebung der 0, indem Sie die entsprechenden Funktionen auf möglichst einfache Weise durch F_0 *darstellen. Was ist der jeweilige Konvergenzradius?*

b) Geben Sie entsprechend die Taylorentwicklung von $\log \frac{\sin z}{z}$ *um* $z = 0$ *an.*

(14+15 Punkte)

Übung 5.4. *Bestimmen Sie das Betragsmaximum auf* $\overline{B_1(0)}$ *von*

$$f(z) := e^{z^2+1}, \qquad g(z) := \frac{z^2+1}{z+4}.$$

(12+13 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html`