Übungen zur Funktionentheorie
(Sommer 2023)
6. Übungsblatt (9.5.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 6.1. *Sei $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und $\bar{D}$ kompakt.*

a) *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ stetiger Funktionen auf $\bar{D}$, die auf D holomorph sind, konvergiere gleichmäßig auf ∂D. Beweisen Sie die gleichmäßige Konvergenz auf D.*

b) *Seien $g, f : \bar{D} \to \mathbf{C}$ stetig, nullstellenfrei und auf D holomorph. Auf ∂D gelte $|f| = |g|$. Zeigen Sie, dass es ein $\zeta \in \mathbf{C}$ gibt mit $|\zeta| = 1$ und $f = \zeta \cdot g$.* *(15+10 Punkte)*

Übung 6.2. *Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ holomorph mit mindestens zwei Fixpunkten. Zeigen Sie $f = \mathrm{id}$. (Tipp: Transformieren Sie f um, so dass es einen Fixpunkt bei 0 hat).* *(20 Punkte)*

Übung 6.3. *Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ biholomorph. Zeigen Sie, dass f beliebige Kreise in $B_1(0)$ auf Kreise abbildet.* *(25 Punkte)*

Übung 6.4. *Sei*

$$\begin{aligned} M \;:=\; & \left\{ f : \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbf{C}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbf{C}, c \neq 0, ad-bc \neq 0 \right\} \\ & \cup \left\{ f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto \frac{az+b}{d} \,\middle|\, a,b,d \in \mathbf{C}, ad \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

a) *Beweisen Sie, dass*

$$\begin{aligned} \rho : (\mathbf{GL}_2(\mathbf{C}), \cdot) &\to (M, \circ), \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto (z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}) \end{aligned}$$

ein Gruppenepimorphismus ist (dabei ist die Komposition $f \circ g$ zweier Abbildungen aus M so gemeint, dass sie auf eine Lücke im Definitionsbereich fortgesetzt wird, wenn $f \circ g$ dort stetig fortsetzbar ist). Zeigen Sie dabei auch, dass $(M, \circ)$ tatsächlich eine Gruppe ist.

b) *Bestimmen Sie den Kern $\ker \rho = \rho^{-1}(\{\mathrm{id}\})$.* *(25+5 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html`