Übungen zur Funktionentheorie
(Sommer 2023)
7. Übungsblatt (16.5.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 23.5.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 7.1. *Sei* $D \subset \mathbf{C}$ *ein einfach zusammenhängendes Gebiet und* $c, \tilde{c} : [0,1] \to D$ *stetig mit gleichem Startpunkt und gleichem Endpunkt. Zeigen Sie, dass* c *und* $\tilde{c}$ *homotop sind. (Tipp: Sei* $\hat{c}$ *der Weg, der mit* c *von* $c(0)$ *nach* $c(1)$ *geht, mit* $\tilde{c}$ *umgekehrt wieder nach* $c(0)$ *und dann mit* $\tilde{c}$ *nach* $c(1)$*. Zeigen Sie, dass* $\hat{c}$ *sowohl zu* c *als auch* $\tilde{c}$ *homotop ist).* *(25 Punkte)*

Übung 7.2. *a) Der geschlossene stetige Weg* $c : [0,1] \to \mathbf{C}^\times$ *schneide die negative reelle Achse* $\mathbf{R}^-$ *genau bei* $t_1, \ldots, t_m$ *mit* $0 < t_1 < \cdots < t_m < 1$ *und* $\operatorname{Im} c$ *wechsele dort das Vorzeichen. Sei*

$$\begin{aligned} M_+ &:= \{1 \le j \le m \mid \operatorname{Im} c(t) \text{ wechselt bei } t_j \text{ das Vorzeichen von } + \text{ zu } -\}, \\ M_- &:= \{1 \le j \le m \mid \operatorname{Im} c(t) \text{ wechselt bei } t_j \text{ das Vorzeichen von } - \text{ zu } +\} \end{aligned}$$

(jeweils beim Durchgang mit wachsendem t*). Zeigen Sie*

$$\operatorname{ind}(c, 0) = \#M_+ - \#M_-.$$

(Tipp: Zerlegen Sie den Weg c *bei* $\mathbf{R}^-$ *und verwenden Sie die explizite Formel für den Logarithmus).*

b) Zeigen Sie, dass man analog zu $\varphi \in \mathbf{R}$ *fest den Strahl* $\{re^{i\varphi} \mid r > 0\}$ *an Stelle von* $\mathbf{R}^-$ *verwenden kann.*

(Auf diese Weise läßt sich noch einmal $\operatorname{ind}(c, 0) \in \mathbf{Z}$ *zeigen, wenn man zu gegebenem* c *die Existenz eines Strahls verifiziert, der die Bedingung mit den Vorzeichen-Wechseln erfüllt).* *(30+10 Punkte)*

Übung 7.3. *a) Seien* $c_1, c_2 : [0,1] \to \mathbf{C}^\times$ *stetige geschlossene Wege und* $\frac{c_1}{c_2}(t) := \frac{c_1(t)}{c_2(t)}$*. Zeigen Sie*

$$\operatorname{ind}\left(\frac{c_1}{c_2}, 0\right) = \operatorname{ind}(c_1, 0) - \operatorname{ind}(c_2, 0).$$

b) Seien $c_1, c_2 : [0,1] \to \mathbf{C}$ *stetige geschlossene Wege mit*

$$\forall t : |c_1(t) - c_2(t)| \ne |c_1(t)| + |c_2(t)|.$$

Zeigen Sie, dass c_1, c_2 *in* $\mathbf{C}^\times$ *verlaufen mit* $\operatorname{ind}(c_1, 0) = \operatorname{ind}(c_2, 0)$*. (Tipp: Wo kann die Kurve* $\tilde{c} := \frac{c_1}{c_2}$ *liegen?)* *(15+20 Punkte)*

(Interpretation: Ein Mann läuft mit einem Hund an einer Leine veränderlicher Länge um einen Baum (im Nullpunkt). Solange die Leine den Baum nicht berührt, läuft der Hund genau so oft um den Baum wie der Mann).

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html`