

Übungen zur Funktionentheorie
(Sommer 2023)
8. Übungsblatt (23.5.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 30.5.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 8.1. Für $n, k \in \mathbf{Z}$ und $r \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$ berechne die Umlaufzahl von $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}^\times$, $t \mapsto e^{int} + re^{ikt}$ um 0 (z.B. durch Angabe geeigneter Homotopien).

(20 Punkte)

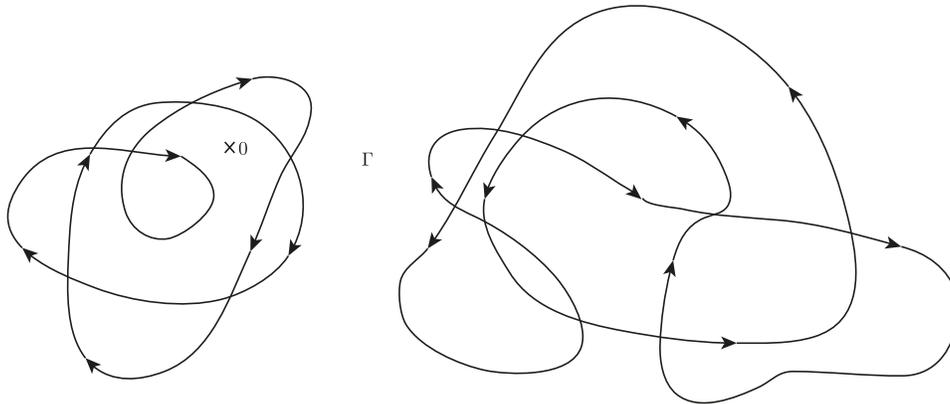
Übung 8.2. Seien $R, a \in \mathbf{R}^+$, $R > a$ und c ein rechteckiger Weg mit Ecken $-R, R, R + iR, -R + iR$ (im mathematischen Drehsinn durchlaufen). Sei c_1 derselbe Weg ohne die Strecke von $-R$ nach R (also nicht geschlossen).

a) Berechnen Sie $\oint_c \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2}$ (Tipp: Stellen Sie $\frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$ mit Hilfe von $\frac{e^{iz}}{z + ia}$ dar).

b) Zeigen Sie $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{c_1} \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2} = 0$ und bestimmen Sie das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2}$. (15+15 Punkte)

Übung 8.3. a) Geben Sie für den Zykel Γ im Bild unten die Umlaufzahl für jede Zusammenhangskomponente von $\mathbf{C} \setminus \text{im } \Gamma$ an. Dabei soll jede Kurve die Vielfachheit 1 haben. Begründen Sie Ihre Lösung präzise exemplarisch für die Zusammenhangskomponente der 0, z.B. mit Übung 7.2.

b) Bestimmen Sie das Integral $\int_{\Gamma} \frac{e^z + \sin z}{z^3} dz$. (15+15 Punkte)



Übung 8.4. Sei D ein Gebiet, $c : [0, 1] \rightarrow D$ stetig und $f \in \mathcal{O}(D)$ nullstellenfrei. Zeigen Sie

$$f(c(1)) = f(c(0)) \exp \int_c \frac{f'(w) dw}{f(w)}$$

und folgern Sie $\int_{\Gamma} \frac{f'(w) dw}{f(w)} \in 2\pi i \mathbf{Z}$ für jeden Zykel Γ in D . (20 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html>