

Übungen zur Funktionentheorie
(Sommer 2023)
9. Übungsblatt (30.5.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 6.6.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 9.1. a) Beweisen Sie, dass jeder Zykel Γ in $\mathbf{C}^\times$ homolog zu einer Kurve der Form $c_\ell : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^\times$, $t \mapsto e^{2\pi i \ell t}$ ist. Zeigen Sie auch, dass die Kurven $c_\ell, c_{\ell'}$ für $\ell \neq \ell'$ nicht homolog sind.

b) Sei D ein Elementargebiet. Beweisen Sie für jede biholomorphe Abbildung $f : D \rightarrow D'$, dass D' ebenfalls ein Elementargebiet ist.

(15+15 Punkte)

Übung 9.2. Von welcher Art sind die Singularitäten bei $z = 0$ von

$$a) f(z) := \frac{1}{1 - e^{z^3}}, \quad b) g(z) := e^{\sin 1/z}, \quad c) h(z) := \frac{1}{z - \sin z}?$$

Geben Sie bei Polstellen auch die Pol-Ordnung an. (5+5+5 Punkte)

Übung 9.3. Finden Sie die Laurent-Reihenentwicklung von $f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3}$ auf

$$a) B_{0;1}(0), \quad b) B_{1;3}(0), \quad c) B_{3;5}(0).$$

(8+9+8 Punkte)

Übung 9.4. Berechnen Sie die Residuen an allen isolierten Singularitäten von

$$(1) \frac{1 - \cos z}{z}, \quad (2) \frac{z}{1 - e^{-z}}, \quad (3) \frac{e^z}{(z - 1)^3}.$$

(7+13+10 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html>