

Übungen zur Funktionentheorie
(Sommer 2023)
10. Übungsblatt (6.6.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 13.6.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 10.1. a) Seien $P, Q \in \mathbf{C}[X, Y]$ mit $Q(x, y) \neq 0$ für $x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1$. Setze

$$f(z) := \frac{P\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)}{zQ\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)}.$$

Zeigen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos \varphi, \sin \varphi)}{Q(\cos \varphi, \sin \varphi)} d\varphi = 2\pi \sum_{|z_0| < 1} \operatorname{Res}(f, z_0).$$

b) Berechnen Sie mit Teil (a)

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2} \text{ für } a \in \mathbf{C}, |a| < 1, \quad 2) \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(b + \cos \varphi)^2} \text{ für } b \in \mathbf{C}, |b| > 1.$$

(Tipp zu (2): Zeigen Sie, dass die Polstellen z_1, z_2 Betrag ungleich 1 haben und $z_1 z_2 = 1$ erfüllen. Also hat genau eine Betrag < 1 . Stellen Sie die Lösung mit dieser dar.) (15+10+10 Punkte)

Übung 10.2. Beweisen Sie für $k, n \in \mathbf{R}, 0 \leq k < n - 1$ mit Hilfe von Satz 2.50 und der Substitution $y = x^n$

$$\int_0^\infty \frac{x^k}{1 + x^n} dx = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{k+1}{n}\pi\right)}.$$

(15 Punkte)

Übung 10.3. Verwenden Sie den Ausdruck $\cot(\pi/2 - \pi z) - \cot(\pi/2 + \pi z)$, um eine Partialbruch-Zerlegung des Tangens zu erhalten. Deduzieren Sie ähnliche Formeln für $\pi^2 / \cos^2 \pi z$ und für $\pi / \cos \pi z$. (25 Punkte)

Übung 10.4. Sei f holomorph auf $D \supset \overline{B_r(z_0)}$ mit $f(\partial B_r(z_0)) \subset B_r(z_0)$. Folgern Sie mit dem Satz von Rouché durch Vergleich mit $z \mapsto z - z_0$, dass f in $B_r(z_0)$ genau einen Fixpunkt hat. (25 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html>