

Übungen zur Funktionentheorie
(Sommer 2023)
11. Übungsblatt (13.6.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 20.6.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 11.1. a) Sei $f \in \text{Aut}(\mathbf{C})$ kein Polynom und $g : \mathbf{C}^\times \rightarrow \mathbf{C}$, $z \mapsto f(1/z)$. Vergleichen Sie $f(B_1(0))$ und $g(B_1(0) \setminus \{0\})$ mit Hilfe des Satzes von Casorati-Weierstraß 2.39(3). Folgern Sie einen Widerspruch.

b) Zeigen Sie $\text{Aut}(\mathbf{C}) = \{z \mapsto a + bz \mid a \in \mathbf{C}, b \in \mathbf{C}^\times\}$. (12+13 Punkte)

Übung 11.2. a) Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ nullstellenfrei längs eines in D nullhomologen Zyklus Γ . f habe die Nullstellen z_1, \dots, z_n auf $\text{ind}(\Gamma, \cdot) \neq 0$. Beweisen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{wf'(w)}{f(w)} dw = \sum_j \text{ind}(\Gamma, z_j) \text{ord}(f, z_j) z_j.$$

b) Sei $g : D \rightarrow \mathbf{C}$ biholomorph. Folgern Sie für $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ und $z \in g(B_r(z_0))$

$$g^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{wg'(w) dw}{g(w) - z}.$$

(12+13 Punkte)

Übung 11.3. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Rouché:

a) $z^5 + 2 + e^z$ hat genau 3 Nullstellen in $D := \{x + iy \in \mathbf{C} \mid x < 0\}$.

b) $z^4 + z + 1$ hat vier Nullstellen in $B_{4/3}(0)$, und zwar in jedem Quadranten genau eine. (12+13 Punkte)

Übung 11.4. Sei $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet D . Die Folge der Ableitungen $(f'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiere kompakt gegen eine Funktion g und es gebe ein $z_0 \in D$, bei dem $(f_n(z_0))_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert. Beweisen Sie die kompakte Konvergenz von $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$. (Tipp: Finden Sie eine lokale Schranke für $(f_n)_n$ um z_1 durch Integration von g längs radialer Strecken von z_1 aus). (25 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html>