Übungen zur Funktionentheorie
(Sommer 2023)
12. Übungsblatt (20.6.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 27.6.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 12.1. *Sei $D \neq \mathbf{C}$ einfach zusammenhängend, $z_0 \in D$, $f \in \mathcal{O}(D)$ mit $f(D) \subset D$ und $f(z_0) = z_0$. Zeigen Sie (z.B. durch Abbildung auf die Einheitsscheibe):*

a) Es ist $|f'(z_0)| \leq 1$.

b) Es gilt

$$|f'(z_0)| = 1 \Leftrightarrow f \in \mathrm{Aut}\,(\mathrm{D}),$$

und $\{g \in \mathrm{Aut}\,(\mathrm{D}) \,|\, \mathrm{g}(\mathrm{z}_0) = \mathrm{z}_0\} \to \partial \mathrm{B}_1(0)$, $g \mapsto g'(z_0)$ ist ein Gruppenhomomorphismus. *(10+15 Punkte)*

Übung 12.2. *Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$ nicht-konstant und* doppelt periodisch, *d.h. es gebe $\mathbf{R}$-linear unabhängige $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ mit $\forall z \in \mathbf{C} : f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$. Sei*

$$F_w := \{w + a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \,|\, a_1, a_2 \in [0, 1[\}$$

zu $w \in \mathbf{C}$.

a) Zeigen Sie, dass w so gewählt werden kann, dass f auf ∂F_w keine Null- oder Polstellen hat.

b) Beweisen Sie für diesen Fall mit Hilfe des Null- und Polstellen zählenden Integrals, dass die Summe über die Null- und Polstellenordnungen in F_w verschwindet. *(10+15 Punkte)*

Übung 12.3. *Zeigen Sie, dass $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ homöomorph zu der Sphäre $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ ist. Sei $U_0 := S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\}$, $U_1 := S^2 \setminus \{(-1, 0, 0)\}$. Verwenden Sie die stereographischen Projektionen*

$$\varphi_0 : U_0 \to \mathbf{C}, (x_0, x_1, x_2) \mapsto \frac{(x_1, x_2)}{1 - x_0},$$

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbf{C}, (x_0, x_1, x_2) \mapsto \frac{(x_1, x_2)}{1 + x_0}.$$

(25 Punkte)

Übung 12.4. *Sei $M = \mathbf{C}/\Lambda$ eine elliptische Kurve. Zeigen Sie, dass M homöomorph zu $\partial B_1(0) \times \partial B_1(0)$ ist. (Tipp: Vielleicht hilft es Ihnen, zuerst einen Homöomorphismus zu $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ zu konstruieren, auch wenn dies nicht unbedingt notwendig ist).* *(25 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html`