

Übungen zur Funktionentheorie
(Sommer 2023)
14. Übungsblatt (4.7.2023)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 11.7.2023, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 14.1. Sei $A : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ durch Operation von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{C})$ gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass A einen biholomorphen Automorphismus f_A von $\mathbf{P}^1\mathbf{C} = (\mathbf{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbf{C}^\times$ induziert.
- b) Zeigen Sie, dass diese Abbildung $f : \mathbf{SL}_2(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{P}^1\mathbf{C})$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist. (Tipp: Unterscheiden Sie für $g \in \text{Aut}(\mathbf{P}^1\mathbf{C})$ die Fälle $g((0 : 1)) = (0 : 1)$ und $\exists w \in \mathbf{C} : g((1 : w)) = (0 : 1)$. Führen Sie den 2. Fall auf den 1. zurück).
- c) Bestimmen Sie den Kern $K := \ker f$, mit dem dann also $\text{Aut}(\mathbf{P}^1\mathbf{C}) \cong \mathbf{SL}_2(\mathbf{C})/K$ wird. (Bem.: $\mathbf{SL}_2(\mathbf{C})/K$ ist isomorph zur in der Physik nicht ganz unwichtigen Lorentz-Gruppe $\mathbf{SO}_0(1,3)$) (10+15+5 Punkte)

Übung 14.2. Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$ nicht-konstant und doppelt periodisch wie in Übung 12.2 bzgl. $\Lambda = \mathbf{Z} \cdot \omega_1 + \mathbf{Z} \cdot \omega_2$. Zeigen Sie (z.B. mit dem Residuensatz) für Repräsentanten $z_1, \dots, z_n$ der Polstellen von f auf $\mathbf{C}/\Lambda$

$$\sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = 0.$$

Falls f genau eine Polstelle auf $\mathbf{C}/\Lambda$ hat, folgern Sie, dass diese nicht die Ordnung -1 haben kann. (17+3 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2023/Vorlesung.html>