

Übungen zur Globalen Analysis I

(Winter 2024/25)

1. Übungsblatt (8.10.2024)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 15.10.2024, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 1.1. Ein Stab im $\mathbf{R}^3$ der Länge $\ell \in \mathbf{R}^+$ habe Anfangspunkt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und Endpunkt $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass die Menge M der möglichen Paare (x, y) (also die Menge der Lagen des Stabes im Raum) eine Untermannigfaltigkeit eines $\mathbf{R}^m$ ist. (Bem.: Dies würde schwieriger, wenn man den Stab als symmetrisch auffassen würde und Anfangs- und Endpunkt nicht unterscheiden würde.) (30 Punkte)

Übung 1.2. Sei $M \subset \mathbf{R}^2$ das Bild der Abbildung $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbf{R}^2, \vartheta \mapsto \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$. Überprüfen Sie, ob M eine Untermannigfaltigkeit ist. Tipp: Wie viele Zusammenhangskomponenten hat $M \setminus \{(0, 0)\}$ in jeder hinreichend kleinen Umgebung von $(0, 0)$? (30 Punkte)

Übung 1.3. Sei $\mathbf{O}(n) := \{A \in \mathbf{R}^{n \times n} \mid A \cdot A^t = \text{id}_{\mathbf{R}^n}\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{O}(n) \subset \mathbf{R}^{n \times n}$ eine Untermannigfaltigkeit ist. (Tipp: Berechnen Sie die Ableitung einer geeigneten Funktion f bei $A \in \mathbf{O}(n)$ in Richtung $X(A^{-1})^t$ für beliebiges $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$).

b) Welche Dimension hat $\mathbf{O}(n)$? (30+10 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024-25/Vorlesung.html>