

Übungen zur Globalen Analysis I  
(Winter 2024/25)  
2. Übungsblatt (15.10.2024)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 22.10.2024, bis 10:30 in der Vorlesung.

**Übung 2.1.** Die Kleinsche Flasche  $M$  sei (als topologischer Raum) der Quotient von  $\mathbf{R}^2$  durch die Äquivalenzrelation  $(s, t) \sim (s + 2\pi n, (-1)^n t + 2\pi m)$   $\forall n, m \in \mathbf{Z}$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $M$  die Struktur einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit trägt.
- b) Beweisen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot (r + \cos \psi) \\ \sin \varphi \cdot (r + \cos \psi) \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \psi \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \psi \end{pmatrix}$$

für  $r > 1$  eine Einbettung der Kleinschen Flasche in den  $\mathbf{R}^4$  ist.

(25+25 Punkte)

(Bemerkung: Eine Einbettung in den  $\mathbf{R}^3$  gibt es nicht.)

**Übung 2.2.** Zeigen Sie, dass die Räume  $\mathbf{P}^1\mathbf{R}$  und  $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$  diffeomorph zu den Sphären  $S^1$  bzw.  $S^2$  sind (analog ist  $\mathbf{P}^1\mathbf{H}$  diffeomorph zu  $S^4$ ) (Tipp: Verwenden Sie die stereographischen Projektionen der Sphären aus Ana II/III als Karten).  
(25 Punkte)

**Übung 2.3.** Beweisen Sie, dass die Abbildung  $f : S^n \rightarrow \mathbf{P}^n\mathbf{R}, x \mapsto [x]$  surjektiv und ein lokaler Diffeomorphismus ist. Bestimmen Sie das Urbild jedes Punktes.  
(25 Punkte)