

Übungen zu Komplexen Mannigfaltigkeiten
(Winter 2024/25)
6. Übungsblatt (18.11.2024)

Abgabe der Lösungen nächsten Montag, 25.11.2024, bis 16:30 in der Vorlesung.

1 Seien $a, b \in \mathbf{C}$ mit $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Beispiels aus der Vorlesung, dass die Teilmenge

$$M := \{(x : y : z) \in \mathbf{P}^2\mathbf{C} \mid y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3\} \subset \mathbf{P}^2\mathbf{C}$$

eine kompakte komplexe Untermannigfaltigkeit ist.

(Bem.: Man kann sehr explizit jede homogene kubische Gleichung in 3 Variablen durch Koordinatentransformation in die obige Gestalt bringen.)
(20 Punkte)

2 Beweisen Sie, dass $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$ (die komplexen $n \times n$ -Matrizen mit Determinante 1) eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{C}^{n^2}$ ist. (15 Punkte)

3 Sei G eine Gruppe, die auch eine komplexe kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist, und V ein komplexer Vektorraum. Sei $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine *holomorphe Darstellung*, d.h. eine holomorphe Abbildung, die ein Gruppenhomomorphismus ist. Beweisen Sie $\rho \equiv \text{id}_V$. (15 Punkte)