

Übungen zu Komplexen Mannigfaltigkeiten
(Winter 2024/25)
13. Übungsblatt (20.1.2025)

Abgabe der Lösungen Montag, 27.1.2025, bis 16:30 in der Vorlesung.

Übung 13.1. Sei $\mathcal{O}(-1)$ das tautologische Linienbündel auf dem $\mathbf{P}^n K$, $K = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(-1) &\rightarrow \{([x], v) \in \mathbf{P}^n K \times K^{n+1} \mid v \in x \cdot K\} \\ (x, \lambda) &\mapsto ([x], \lambda x).\end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $K - C^\infty$ -Vektorbündeln ist. (20 Punkte)

Damit wird $\mathcal{O}(-1)$ ein Unterbündel des trivialen K^{n+1} -Bündels $\{([x], v) \in \mathbf{P}^n K \times K^{n+1}\}$. Sei $\mathcal{O}(-1)^\perp$ das orthogonale Komplement zu $\mathcal{O}(-1)$ in K^{n+1} .

Übung 13.2. Beweisen Sie $T\mathbf{P}^n K \cong \mathrm{Hom}_K(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-1)^\perp)$. Dazu können Sie z.B. die Ableitung $T_0\vartheta$ der Abbildung

$$\begin{aligned}\vartheta : \mathrm{Hom}_K(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-1)^\perp)_{[x]} &\rightarrow \{p \in \mathbf{P}^n K \mid p \cap x^\perp = 0\} \\ \varphi &\mapsto (v + \varphi(v)) \cdot K^\times \text{ mit } v \in [x] \\ \varphi \text{ mit } \varphi(v) = w &\leftrightarrow (v + w) \cdot K^\times \text{ mit } v \in [x], w \in x^\perp\end{aligned}$$

betrachten. (30 Punkte)

Insbes. folgt

$$\begin{aligned}T\mathbf{P}^n K \oplus K &\cong \mathrm{Hom}_K(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-1)^\perp) \oplus \mathrm{Hom}_K(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-1)) \\ &= \mathrm{Hom}_K(\mathcal{O}(-1), K^{n+1}) \cong \bigoplus_{i=1}^{n+1} \underbrace{\mathcal{O}(-1)^*}_{=: \mathcal{O}(1)}.\end{aligned}$$