Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
1. Übungsblatt (8.4.2024)

Abgabe der Lösungen Montag, 15.4.2024, bis 16:30 in der Vorlesung.

Übung 1.1. *Ein* Killing-Vektorfeld X *auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* (M, g) *ist ein Vektorfeld mit* $L_X g = 0$ *(nach Wilhelm Karl Joseph Killing, 1847–1923). Sei* ∇ *der Levi-Civita-Zusammenhang. Folgern Sie, dass* X *genau dann Killing ist, wenn*

a) ∇X *punktweise ein schiefer Endomorphismen von* TM *ist,*

b) der Fluss Φ *von* X *aus Isometrien besteht.* *(15+15 Punkte)*

Übung 1.2. *Sei* M *eine* C^∞*-Mannigfaltigkeit,* X *ein Vektorfeld auf* M*,* $p \in M$ *eine Nullstelle von* X *und* ∇ *ein beliebiger Zusammenhang auf* TM*. Zeigen Sie* $(L.X)_{|p} = (\nabla X)_{|p}$ *als Abbildungen von* T_pM *nach* T_pM*. Insbesondere liegen beide in* $\mathrm{End}\,(T_pM)$*.* *(20 Punkte)*

Übung 1.3. *Zeigen Sie, dass der Levi-Civita-Zusammenhang* ∇^{TM} *eindeutig bestimmt ist durch*

$$\nabla^{T^*M}\alpha = \frac{1}{2}d\alpha + \frac{1}{2}L_{\alpha^\#}g \qquad \forall \alpha \in \Gamma(M, T^*M)$$

als Zerlegung in den schiefsymmetrischen und den symmetrischen Anteil (wobei $\# : T^*M \to TM$ *der musikalische Isomorphismus ist).* *(30 Punkte)*

Übung 1.4. *Eine Immersion* $\iota : M \hookrightarrow \tilde{M}$ *heißt* totalgeodätisch, *falls* $II \equiv 0$*. Folgern Sie in diesem Fall, dass jede Geodätische auf* M *auch Geodätische auf* $\tilde{M}$ *ist.* *(20 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`