Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
2. Übungsblatt (15.4.2024)

Abgabe der Lösungen Montag, 22.4.2024, bis 16:30 in der Vorlesung.

Übung 2.1. *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die gemeinsame Fixpunktmenge M^Γ einer Menge Γ von Isometrien eine total-geodätische Untermannigfaltigkeit ist. Insbesondere ist jede eindimensionale Zusammenhangskomponente der Fixpunktmenge Bahn einer Geodätischen.* (Tipp: Verwenden Sie Normalumgebungen und exp.) *(25 Punkte)*

Übung 2.2. *Sei N Untermannigfaltigkeit einer riemannschen Mannigfaltigkeit M.*

a) Sei c eine Kurve in N mit $\nabla^{c^*TM}_{\partial/\partial t}\dot{c} \perp c^*TN$. Folgern Sie, dass c eine Geodätische in N ist.

b) Sei c eine Geodätische in M, deren Bahn in N liegt. Folgern Sie, dass c auch eine Geodätische in N ist.

c) Wie viele Geodätische erkennen Sie auf der Fläche im Hof vor der Caféteria? *(10+10+5 Punkte)*

Übung 2.3. *Sei $G \subset \mathbf{SO}(k)$ eine Lie-Untergruppe und $\mathfrak{so}(k)$ der Vektorraum der schiefsymmetrischen $k \times k$-Matrizen. Sei $g_{\mathrm{id}}(A,B) = -\mathrm{Tr}\, AB$ für $A, B \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(k)$. Zeigen Sie, dass $\exp_{\mathrm{id}}(A)$ mit $A \in \mathfrak{g}$ durch*

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$$

gegeben ist. *(25 Punkte)*

Übung 2.4. *Zwischen dem math. Institut und der Zentralbibliothek steht eine Skulptur aus Metallbändern von Cristián Salineros. Beweisen Sie (unter anderem z.B. mit Übung 2.2(a)), dass die Metallbänder Geodätische auf der angedeuteten Fläche sind.* *(25 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`