Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
3. Übungsblatt (22.4.2024)

Abgabe der Lösungen Montag, 29.4.2024, bis 16:30 in der Vorlesung.

Übung 3.1. *Sei I ein Intervall und $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$, $w : I \to S^2$ zwei C^∞-Abbildungen mit $w'(t) \neq 0\ \forall t$. Eine **(nichtzylindrische)*** Regelfläche *M im $\mathbf{R}^3$ ist eine Fläche mit einer Parametrisierung*

$$u : I \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, (t, s) \mapsto \alpha(t) + s \cdot w(t)$$

für solche α, w. M wird also durch eine Familie von Geraden beschrieben. Die Kurve α heißt Leitkurve *von M.*

a) *Zeigen Sie, dass es zu gegebenem (α, w) eine eindeutig bestimmte Kurve $\beta : I \to \mathbf{R}^3$ der Form*

$$\beta(t) = \alpha(t) + s(t)w(t)$$

gibt , die überall $\langle \beta'(t), w'(t)\rangle = 0$ erfüllt. β heißt Striktionslinie.

b) *Sei $(\tilde\alpha, w)$ eine weitere Regelflächen-Beschreibung von M mit $\tilde\alpha(t) = \alpha(t)+\tilde s(t)w(t)$. Zeigen Sie, dass die entsprechende Striktionslinie wieder β ist. Die Striktionslinie ist also eine kanonische Wahl für die Leitkurve.*

c) *M ist nicht unbedingt überall eine Mannigfaltigkeit. Sei*

$$\lambda := \frac{\det(\beta', w, w')}{|w'|^2}$$

der Verteilungsparameter. *Zeigen Sie, dass M genau dann an einem Punkt p keinen Tangentialraum hat, wenn p auf der Striktionslinie liegt und λ dort eine Nullstelle hat. Tipp: Wählen Sie als α die Striktionslinie.* *(10+10+10 Punkte)*

Übung 3.2. *Sei M eine durch (α, w) bestimmte Regelfläche ohne singuläre Stellen wie in Übung 3.1(3), wobei α die Striktionslinie ist. Bestimmen Sie die vom $\mathbf{R}^3$ induzierte Riemannsche Metrik auf M und (in Termen von λ und $\|w'\|$) die zugehörige Volumenform (bzw. den pullback beider mit u).* *(20 Punkte)*

Übung 3.3. *Sei M eine durch (α, w) bestimmte Regelfläche, wobei α die Striktionslinie ist. Bestimmen Sie an den regulären Punkten für den Levi-Civita-Zusammenhang $\nabla_{\partial_s}\partial_s, \nabla_{\partial_t}\partial_s, \nabla_{\partial_s}\partial_t$ (in Termen von λ und $\langle\alpha', w\rangle$).* *(25 Punkte)*

Übung 3.4. *Zeigen Sie, dass die Krümmung einer Regelfläche M zu einer Parametrisierung u zu (α, w), α Striktionslinie, gegeben ist durch*

$$K_{u(t,s)} = -\frac{\lambda(t)^2}{(\lambda(t)^2 + s^2)^2} \leq 0.$$

(25 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`