Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
4. Übungsblatt (29.4.2024)

Abgabe der Lösungen Montag, 6.5.2024, bis 16:30 in der Vorlesung.

Übung 4.1. *a) Zeigen Sie, dass ein Killing-Vektorfeld X auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ein Jacobi-Feld entlang jeder Geodätischen c ist.*

b) Sei M zusammenhängend, $p \in M$ fest und X, Y Killing-Vektorfelder mit $X_p = Y_p$, $(\nabla X)_p = (\nabla Y)_p$. Folgern Sie $X = Y$ (z.B. mit Teil 1).

(15+10 Punkte)

Übung 4.2. *Sei $M = \mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})$ ein flacher 2-dimensionaler Torus für $\tau \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$. Bestimmen Sie die Punkte, die von mindestens zwei verschiedenen in 0 startenden Geodätischen minimaler Länge erreicht werden (mit Skizze dieser Punktmenge in einem Fundamentalbereich). Dabei können Sie annehmen, dass $|\tau| \geq 1$ und $0 \leq \operatorname{Re}\tau \leq 1/2$ (bis auf Skalierung lässt sich das stets durch Drehungen, Spiegelung und Wahl der Gitterbasis erreichen).* *(25 Punkte)*

Übung 4.3. *Sei γ eine Isometrie einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M.*

a) Zeigen Sie, dass ein Fixpunkt $x \in M$ von γ genau dann isoliert ist, wenn die Eigenwerte von $T_x\gamma$ ungleich 1 sind (Tipp: Verwenden Sie Geodätische).

b) Beweisen Sie, dass die Fixpunktmenge M^γ endlich ist, wenn alle Fixpunkte isoliert sind. *(10+15 Punkte)*

Übung 4.4. *(Satz von Minding) Sei M eine Fläche mit konstanter Krümmung $K = -1$, 0 oder 1. Bestimmen Sie mit Lemma 4.3.12 explizit die Metrik in geodätischen Polarkoordinaten und folgern Sie, dass alle Flächen konstanter Krümmung lokal isometrisch sind.* *(25 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`