Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
5. Übungsblatt (6.5.2024)

Abgabe der Lösungen Montag, 13.5.2024, bis 16:30 in der Vorlesung.

Übung 5.1. *Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und c eine Geodätische. Es gebe keine kürzere Geodätische als c von $c(a)$ nach $c(b)$. Folgern Sie, dass c kürzester Weg von $c(a)$ nach $c(b)$ ist. Finden Sie ein Gegenbeispiel für diese Aussage bei nicht-vollständigem M. (10+10 Punkte)*

Übung 5.2. *Beweisen Sie, dass die gemeinsame Fixpunktmenge M^Γ einer endlichen Gruppe von Diffeomorphismen eine Untermannigfaltigkeit ist. (Tipp: Konstruieren Sie eine Metrik, für die Γ aus Isometrien besteht.)*
(25 Punkte)

Übung 5.3. *Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von Hopf-Rinow: Eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ einer (bzgl. dist_M) vollständigen Mannigfaltigkeit M ist (bzgl. dist_N) vollständig. (20 Punkte)*

Übung 5.4. *Sei $M \subset \tilde{M}$ eine Hyperfläche und $\mathfrak{n}$ ein (lokales) Normalenfeld mit $\|\mathfrak{n}\| = 1$.*

a) Zeigen Sie $\nabla^N \mathfrak{n} \equiv 0$.

b) Sei zusätzlich $\tilde{M}$ der euklidische $\mathbf{R}^{n+1}$. Folgern Sie aus der Mainardi-Codazzi-Gleichung $\nabla^{TM}(T\mathfrak{n}) \equiv 0$, wobei $T\mathfrak{n}$ als Element von $\mathfrak{A}^1(M, TM)$ interpretiert wird. (10+25 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`