Übungen zu Homogenen Räumen

(Sommer 2024)

6. Übungsblatt (13.5.2024)

Abgabe der Lösungen Montag, 20.5.2024, bis 16:30 in der Vorlesung.

Die Übungen 1,3,4 dieses Blatts können sehr elementargeometrisch gelöst werden.

Übung 6.1. *Zeigen Sie, dass die Geodätische durch* $\mathbf{x} \in H^n$ *in Richtung* $X \in T_{\mathbf{x}} H^n$ *mit* $\|X\|_L^2 = -1$ *die Gestalt*

$$c(t) := \mathbf{x} \cosh t + X \sinh t$$

hat. *(10 Punkte)*

Übung 6.2. *Sei* $N := (1, 0, \ldots, 0)^t \in \mathbf{R}^n$ *und*

$$\varphi : B_1^n(0) \to \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^{n-1}, x \mapsto 2 \frac{x + N}{\|x + N\|_{\text{eukl}}^2} - N \ .$$

Zeigen Sie, dass φ *eine Karte ist und dass für die hyperbolische Metrik* g *auf* $B_1^n(0)$ *gilt*

$$(\varphi^{-1})^* g = \frac{g_{\text{eukl}}}{x_1^2} \ .$$

(25 Punkte)

Übung 6.3. a) *Zeigen Sie für eine beliebige Sphäre* S *im euklidischen Raum und eine Gerade durch Null, die* S *in zwei Punkten* p, q *schneidet, dass* $\|p\| \cdot \|q\|$ *eine von der Geraden unabhängige Konstante ist.*

b) *Beweisen Sie mit (1), dass die Abbildung* φ *aus Übung 6.2 Kreise oder Geraden auf Kreise oder Geraden abbildet (bezüglich der euklidischen Metrik auf* $B_1^n(0), \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n$*). Dazu können Sie* φ *zunächst durch Translationen vereinfachen und zeigen, dass hinreichend allgemeine Sphären auf Sphären abgebildet werden.* *(15+15 Punkte)*

Übung 6.4. a) *Zeigen Sie, dass* φ *Winkel bezüglich der euklidischen Metrik auf* $B_1^n(0), \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n$ *erhält.*

b) *Zeigen Sie für das Ball-Modell sowie das obere-Halbraum-Modell von* H^n*, dass die Geodätischen Abschnitte derjenigen Kreise und Geraden sind, die den Rand senkrecht schneiden.* *(15+20 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`