Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
7. Übungsblatt (21.5.2024)

Abgabe der Lösungen Dienstag, 28.5.2024, bis 16:30 in der Vorlesung.

Übung 7.1. *Bestimmen Sie für die Fläche $M_1 \subset \mathbf{R}^3$ mit Parametrisierung*

$$f_1 : \begin{pmatrix} t \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ \log t \end{pmatrix}$$

an jedem Punkt (t, φ) die Gauß-Krümmung und die Volumenform. (15 Punkte)

Übung 7.2. *Zeigen Sie, dass die Fläche M_2 zu*

$$f_2 : \begin{pmatrix} t \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix} ,$$

an jedem Punkt gleiche Gauß-Krümmung und gleiche Volumenform wie M_1 hat, aber nicht dieselbe Riemannsche Metrik. (25 Punkte)

Übung 7.3. *Sei $\pi : M \to \tilde{M}$ eine Riemannsche Submersion und c eine Kurve in M. Zeigen Sie, dass c mindestens so lang ist wie $\pi \circ c$. Folgern Sie damit direkt unter den Annahmen $\pi \circ c$ geodätisch und $\dot{c} \in T^H M$, dass c Geodätische ist. (25 Punkte)*

Übung 7.4. *Bestimmen Sie A und T für ein* ***verzerrtes Produkt***

$$(B \times Z, \pi_1^* g_B + \pi_1^* e^{2f} \cdot \pi_2^* g_Z)$$

mit Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(B, g_B), (Z, g_Z)$, $\pi_1 : B \times Z \to B$, $\pi_2 : B \times Z \to Z$ und $f \in C^\infty(B, \mathbf{R})$. (35 Punkte)

(Bem.: Die Schwarzschild-Metrik und die wichtigsten kosmologische Modelle lassen sich als verzerrtes Produkt konstruieren.)

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`