Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
8. Übungsblatt (28.5.2024)

Abgabe der Lösungen Dienstag, 4.6.2024, bis 16:30 in der Vorlesung.

Übung 8.1. *Zeigen Sie direkt mit Korollar 5.3.7 und Korollar 4.3.11, aber ohne Verwendung von A und T, dass für horizontale Lifts $X, Y \in T_pM$ von $\tilde{X}, \tilde{Y}$ und die Schnittkrümmungen $K, \tilde{K}$ von $M, \tilde{M}$ gilt*

$$\tilde{K}(\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) \geq K(X \wedge Y) \; .$$

(25 Punkte)

Übung 8.2. *Beweisen Sie die letzte der sechs Krümmungsgleichungen von O'Neill für Submersionen:*

$$R(X, Y, Z, U) = \langle (\nabla_Z A)_X Y, U \rangle + \langle A_X Y, T_U Z \rangle - \langle A_Y Z, T_U X \rangle - \langle A_Z X, T_U Y \rangle$$

für X, Y, Z horizontale Lifts, U vertikal. *(30 Punkte)*

Übung 8.3. *Sei π die Submersion $\pi : S^{2n+1} \to \mathbf{P}^n\mathbf{C}$, $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto [(x_0 : \cdots : x_n)]$, J die komplexe Struktur auf $\mathbf{C}^{n+1} \supset S^{2n+1}$ (i.e. $J : T_p\mathbf{C}^{n+1} \to T_p\mathbf{C}^{n+1}$ ist die Multiplikation mit i) und $\mathfrak{n}$ das nach außen zeigende Normalenvektorfeld auf S^{2n+1}.*

a) *Beweisen Sie, dass die Fasern Z Großkreise sind und bestimmen Sie $T^V S^{2n+1}$ in Termen von $J, \mathfrak{n}$.*

b) *Zeigen Sie, dass für eine geeignete Metrik auf $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ diese Submersion Riemannsch ist.*

c) *Beschreiben Sie die Geodätischen auf $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$.*

d) *Bestimmen Sie die Tensoren A, T.*

e) *Geben Sie die Schnittkrümmung $K(\tilde{X} \wedge \tilde{Y})$ an und bestimmen Sie ihren Wertebereich.* *(10+5+10+10+10 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`