Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
9. Übungsblatt (4.6.2024)

Abgabe der Lösungen Dienstag, 11.6.2024, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 9.1. *Eine Teilmenge* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *einer Liealgebra* $\mathfrak{g}$ *heißt* Ideal *in* $\mathfrak{g}$*, falls* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$*. Zeigen Sie, dass* $\mathfrak{sl}_n$ *ein Ideal in* $\mathfrak{gl}_n$ *ist.* *(15 Punkte)*

Übung 9.2. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie-Algebra mit negativ definiter* Killing-Form

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (X, Y) &\mapsto \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_X \circ \operatorname{ad}_Y) . \end{aligned}$$

a) *Zeigen Sie mit Hilfe der Jacobi-Identität, dass* ad *bzgl.* B *schief ist.*

b) *Sei* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *ein Ideal. Beweisen Sie, dass dann auch* $\mathfrak{h}^\perp$ *ein Ideal ist (*$\perp$ *bezüglich der Killing-Form).*

c) *Zeigen Sie mit (b), dass sich* $\mathfrak{g}$ *als Summe* $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ *zerlegen lässt, wobei die* $\mathfrak{g}_j$ ***einfach*** *sind, d.h. sie sind nicht abelsch und haben keine nichttrivialen Ideale.* *(10+5+10 Punkte)*

Übung 9.3. *Eine Liegruppe* G *operiere* C^∞ *von rechts auf einer Mannigfaltigkeit* M *mit* $\rho : \gamma \mapsto (p \mapsto p\gamma)$*. Jedes* $X \in \mathfrak{g}$ *induziert also einen Diffeomorphismus* $\rho(e^X)$ *von* M*, und* $X' := \frac{d}{dt}_{|t=0} \rho(e^{tX})$ *ist ein Vektorfeld auf* M*.*

a) *Zeigen Sie* $[X', Y'] = [X, Y]'$*.*

b) *Wie lautet die entsprechende Gleichung für die Felder* $X'' := \frac{d}{dt}_{|t=0} \rho(e^{-tX})$ *(bzw. bei einer Operation von links)?* *(15+10 Punkte)*

Übung 9.4. *Sei* G *eine Lie-Gruppe und* G_0 *die Zusammenhangskomponente von* e_G*.*

a) *Zeigen Sie, dass* G_0 *ein Normalteiler von* G *ist.*

b) *Folgern Sie, dass* G/G_0 *eine diskrete Lie-Gruppe ist und dass alle Zusammenhangskomponenten diffeomorph sind.* *(20+15 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`