Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
10. Übungsblatt (11.6.2024)

Abgabe der Lösungen Dienstag, 18.6.2024, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 10.1. *Sei* $(v_1, \ldots, v_n)$ *eine Basis des* $\mathbf{R}^n$ *und* $\Lambda := \mathbf{Z}v_1 + \cdots + \mathbf{Z}v_n$. *Zeigen Sie, dass* Λ *als Untergruppe von* $M = \mathbf{R}^n$ *frei und eigentlich diskontinuierlich auf* M *operiert.* *(25 Punkte)*

Übung 10.2. *Zeigen Sie, dass folgende Riemannsche Mannigfaltigkeiten wohldefiniert sind:*

a) Kleinsche Flasche $(S^1)^2/\pm 1$, *wobei* -1 *als* $(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) \mapsto (-e^{i\varphi}, e^{-i\psi})$ *operiert (vgl. Übung I.2.1).*

b) Möbiusband $S^1 \times \mathbf{R}/\pm 1$, *wobei* -1 *als* $(e^{i\varphi}, x) \mapsto (-e^{i\varphi}, -x)$ *operiert.*

c) Linsenraum $L(m; k_1, \ldots, k_n) := (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})\backslash S^{2n-1}$ *mit der Operation*

$$(\ell, (z_1, \ldots, z_n)) \mapsto (\zeta^{\ell k_1} z_1, \ldots, \zeta^{\ell k_n} z_n)$$

für eine feste primitive m*-te-Einheitswurzel* ζ *und* $k_1, \ldots, k_n$ *teilerfremd zu* m. *(15+10+15 Punkte)*

Übung 10.3. *Sei* $\pi : G \to \tilde{G}$ *ein Lie-Gruppen-Homomorphismus und universelle Überlagerung mit Decktransformationsgruppe* $\Gamma = \pi_1(\tilde{G})$. *Sei* G *zusammenhängend. Zeigen Sie* $\forall \gamma \in \Gamma : R_{\gamma(e_G)} e_G = L_{\gamma(e_G)} e_G = \gamma(e_G)$. *Folgern Sie, dass* Γ *im Zentrum von* G *liegt, also insbesondere abelsch ist. (35 Punkte)*
(Bemerkung. Für eine beliebige Überlagerung $M \to \tilde{G}$ *lässt sich* M *durch Liften der Multiplikation* $\tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ *immer mit einer solchen Liegruppen-Struktur versehen. Insbesondere ist* $\pi_1(\tilde{G})$ *stets abelsch.)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`