Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
11. Übungsblatt (18.6.2024)

Abgabe der Lösungen Dienstag, 25.6.2024, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 11.1. *Sei H^{n+1} das obere Halbraum-Modell des hyperbolischen Raums und G gleich der Untergruppe $\mathbf{R}^+ \ltimes \mathbf{R}^n$ der affinen Transformationen des euklidischen $\mathbf{R}^n$ mit der Operation*

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R}^n, \\ \begin{pmatrix} a_0 \\ a \end{pmatrix} \cdot x & \mapsto & a_0 x + a. \end{array}$$

a) *Bestimmen Sie die Lie-Klammer von G.*

b) *Zeigen Sie, dass $\rho_{\binom{a_0}{a}} : H^{n+1} \to H^{n+1}$, $\binom{x_0}{x} \mapsto \binom{a_0 x_0}{a_0 x + a}$ eine Isometrie ist.*

c) *Sei g_{e_G} das Standardskalarprodukt auf $T_{e_G}G = \mathbf{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass G mit der zugehörigen links-invarianten Metrik isometrisch zu H^{n+1} ist. Geben Sie explizit eine Isometrie an.* *(10+10+15 Punkte)*

Übung 11.2. *Sei G eine zusammenhängende abelsche Lie-Gruppe mit links-invarianter Metrik. Zeigen Sie, dass es eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ gibt, für die G isometrisch zu $\Gamma \backslash \mathbf{R}^n$ ist.* *(15 Punkte)*

Übung 11.3. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und X, Y, Z Killing-Felder.*

a) *Beweisen Sie*

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X,Y], Z) + g([X,Z], Y) + g(X, [Y,Z]).$$

b) *Zeigen Sie, dass $[X,Y]$ wieder ein Killing-Feld ist.* *(15+10 Punkte)*

Übung 11.4. *Seien $p, q \in \mathbf{Z}^+, n := p+q$ und $G_{\mathbf{R}}(p,q)$ die Menge der p-dimensionalen $\mathbf{R}$-Untervektorräume in $\mathbf{R}^n$.*

a) *Zeigen Sie, dass $G := \mathbf{SO}(n)$ transitiv auf $G_{\mathbf{R}}(p,q)$ operiert.*

b) *Bestimmen Sie eine Isotropiegruppe H.* *(15+10 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`