Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
12. Übungsblatt (25.6.2024)

Abgabe der Lösungen Dienstag, 2.7.2024, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 12.1. *Sei M ein homogener Raum, $p \in M, X \in T_pM$. Zeigen Sie, dass es auf M ein Killing-Vektorfeld Y mit $Y_p = X$ gibt.* *(15 Punkte)*

Übung 12.2. *Seien $p, q \in \mathbf{Z}^+, n := p + q$ und $G_{\mathbf{R}}(p, q)$ die Menge der p-dimensionalen $\mathbf{R}$-Untervektorräume in $\mathbf{R}^n$.*

a) Verwenden Sie Übung 11.4, um $G_{\mathbf{R}}(p, q)$ mit der Struktur eines Riemannschen homogenen Raumes zu versehen.

b) Folgern Sie $G_{\mathbf{R}}(p, q) \cong G_{\mathbf{R}}(q, p)$ und bestimmen Sie $\dim G_{\mathbf{R}}(p, q)$.

c) Operiert G effektiv? *(5+10+10 Punkte)*

Übung 12.3. *a) Zeigen Sie, dass $G' := \mathbf{U}(n+1)$ transitiv auf $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ durch*

$$A \cdot (z_0 : \cdots : z_n) := \left[A \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right]$$

operiert.

b) Berechnen Sie die Isotropiegruppe H' von $(1 : 0 : \cdots : 0)$.

c) Finden Sie den maximalen zusammenhängenden Normalteiler N von G' in H' und identifizieren Sie $G := G'/N, H := H'/N$ mit Untergruppen von G'.

d) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $\mathfrak{m} := \mathfrak{h}^\perp$ in $\mathfrak{g}$ bezüglich der Standard-L^2-Metrik auf $\mathbf{C}^{n\times n}$. *(5+10+10+10 Punkte)*

Übung 12.4. *Fortsetzung von 12.3:*

a) Zeigen Sie $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.

b) Bestimmen Sie für $X, Y \in \mathfrak{m}$ (explizit mit Koordinaten beschrieben) die Lie-Klammer $[X, Y]$. Liegt sie in einem speziellen Unterraum von $\mathfrak{g}$?

c) Berechnen Sie für $X, Y \in \mathfrak{m}$ mit $\|X\| = \|Y\| = 1, X \perp Y$ die Norm $\|[X, Y]\|^2$. *(5+10+10 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`