Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
13. Übungsblatt (2.7.2024)

Abgabe der Lösungen Dienstag, 9.7.2024, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 13.1. *Beweisen Sie, dass es auf* $\mathbf{SL}(n+1)/\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{SL}(n) \end{pmatrix}$ *für* $n > 1$ *keine Metrik gibt, für die* $\mathbf{SL}(n+1)$ *durch Isometrien operiert. Ist dieser Raum reduktiv?* *(15 Punkte)*

Übung 13.2. *Bestimmen Sie die Schnittkrümmung von* $\mathbf{SU}(2)$ *bezüglich* $-B$*, wobei* B *die Killing-Form ist.* *(25 Punkte)*

Übung 13.3. *Sei* $G := \{(a,b) \mid a \in \mathbf{R}^+, b \in \mathbf{R}\}$ *die Lie-Gruppe aus Übung I.6.1 und* $M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x + y > 0 \right\}$ *mit der Lorentz-Metrik* $g = dx \otimes dx - dy \otimes dy$*. Zusammenhänge, Krümmung, Geodätische, Isometrien werden für* g *ganz genauso wie für eine Riemannsche Metrik definiert.*

a) *Zeigen Sie, dass* G *auf* M *isometrisch operiert via*

$$(a,b) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+1/a}{2}x + \frac{1/a-a}{2}y + b \\ \frac{1/a-a}{2}x + \frac{a+1/a}{2}y - b \end{pmatrix}.$$

b) *Bestimmen Sie die Isotropiegruppe von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Zeigen Sie, dass* G *effektiv und transitiv auf* M *operiert. Finden Sie einen Diffeomorphismus* $G \to M$*.*

c) *Beweisen Sie, dass die Krümmung von* M *verschwindet. Finden Sie eine lokale Spiegelung* σ_p *um jeden Punkt* $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*, d.h. eine lokale Isometrie mit* $T_p\sigma_p = -\mathrm{id}_{T_pM}$*.*

d) *Zeigen Sie, dass* M *nicht geodätisch vollständig ist.*

(15+15+15+15 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`