Übungen zu Homogenen Räumen
(Sommer 2024)
14. Übungsblatt (9.7.2024)

Abgabe der Lösungen Dienstag, 16.7.2024, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 14.1. *Sei* $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ *ein Ideal (vgl. Übung 9.1). Zeigen Sie für die Killing-Formen von* $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{g}$*, dass*

$$B^{\mathfrak{m}} = B^{\mathfrak{g}}_{|\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}}.$$

(15 Punkte)

Übung 14.2. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie-Algebra mit* $B < 0$*. Zeigen Sie direkt, dass* Ad_h *für jedes* $h \in G$ *eine Isometrie von* $-B$ *ist.* *(15 Punkte)*

Übung 14.3. *Sei* $M := \mathbf{GL}(n)/\mathbf{SO}(n)$ *(mit der kanonischen Einbettung von* $\mathbf{SO}(n)$ *in* $\mathbf{GL}(n)$ *und der Standard-*L^2*-Metrik auf* $\mathfrak{gl}(n)$*).*

a) *Identifizieren Sie ein* $\mathrm{Ad}_{\mathbf{SO}(n)}$*-invariantes* $\mathfrak{m}$ *und zeigen Sie, dass* M *ein natürlich reduktiver Raum ist.*

b) *Beweisen Sie, dass* $\exp_{[e_G]}$ *auf* $\mathfrak{m}$ *injektiv ist. Tipp: Eigenraumzerlegung und die Abbildung* $[A] \mapsto AA^t$*.*

c) *Folgern Sie, dass* $\mathbf{GL}(n)$ *diffeomorph zu* $\mathbf{O}(n) \times \mathbf{R}^m$ *ist (inkl. Berechnung von* m*). Dies ist die* Polarzerlegung.

d) *Beweisen Sie analog* $\mathbf{SL}(n) \cong \mathbf{SO}(n) \times \mathbf{R}^{m'}$*.* *(10+15+5+15 Punkte)*

Übung 14.4. *Berechnen Sie für* G *aus Übung I.6.1 die Killing-Form zu* G*. Kann* G *eine biinvariante Metrik tragen?* *(15+10 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2024/Vorlesung.html`