Übungen zu Globaler Analysis II

(SoSe 2025)

1. Übungsblatt (8.4.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 15.4.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 1.1. *Bestimmen Sie das Symbol des Differentialoperators*

$$D := \sin x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \circ (xyz + y^2) + 2e^y \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \circ e^{x+2z} \circ \frac{\partial}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial x} - 3$$

auf $C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$. *(25 Punkte)*

Übung 1.2. *Beweisen Sie für einen Differentialoperator* $D \in \mathcal{D}_k(M, E)$ *auf* $E \to M$, *dass für* $\xi = df$

$$\sigma_k(D)(\xi) = \frac{i^k}{k!} \sum (-1)^j \binom{k}{j} f^j \circ D \circ f^{k-j}$$

(Tipp: Taylorentwicklung von e^{itf}*).* *(25 Punkte)*

Übung 1.3. *Zeigen Sie für* $D \in \mathcal{D}_k(M, E)$, *den Operator "Multiplikation mit* $f \in C^\infty(M)$*",* $\xi := df$ *und die Lieklammer* $[D, D'] := D \circ D' - D' \circ D$ *von Operatoren, dass*

$$\sigma_k(D)(\xi) = \frac{i^k}{k!} [\ldots [D, \underbrace{f], \ldots, f]}_{k-\text{mal}} \, .$$

(25 Punkte)

Übung 1.4. *Sei* $X \in \Gamma(M, TM)$. *Zeigen Sie für die Lie-Ableitung* L_X *auf* $\Gamma(M, T^p_q M)$, *dass* $L_X \in \mathcal{D}(M, T^p_q M)$, *und berechnen Sie ihr Symbol.* *(25 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html`