Übungen zu Globaler Analysis II
(SoSe 2025)
2. Übungsblatt (15.4.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 22.4.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 2.1. *Für ein Vektorfeld X auf (M, g) sei der* Defekt $\mathrm{Def}_X := \frac{1}{2}(L_X g)^\sharp \in \Gamma(M, \mathrm{End}\,(TM))$, *d.h. für Vektorfelder Y, Z gilt*

$$\frac{1}{2}(L_X g)(Y, Z) = g(Y, \mathrm{Def}_X Z)\ .$$

Zeigen Sie

$$L_X^* Y = -L_X Y + (\mathrm{div} X)Y - 2\mathrm{Def}_X Y\ .$$

(30 Punkte)

Übung 2.2. *Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang. Beweisen Sie für den de Rham-Operator d in einer lokalen ONB (e_j) von TM*

$$d^* = -\sum_j \iota_{e_j} \nabla_{e_j}$$

(bzw. ohne ONB $d^* = -\iota \circ \nabla$) und verifizieren Sie für eine 1-Form α

$$d^*\alpha = -\mathrm{Tr}\,\nabla\alpha^\sharp = -\sum_j \Big(e_j.(\alpha(e_j)) - \alpha(\nabla_{e_j} e_j) \Big)\ .$$

(20+10 Punkte)

Übung 2.3. *Berechnen Sie für eine riemannsche Mannigfaltigkeit M und ein euklidisches Vektorbündel E mit metrischem Zusammenhang*

$$\nabla : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, T^*M \otimes E)$$

die Adjungierte $\nabla^* : \Gamma(M, T^*M \otimes E) \to \Gamma(M, E)$ und verifizieren Sie $\Delta^E = \nabla^*\nabla$. *(20+20 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html`