Übungen zu Globaler Analysis II
(SoSe 2025)
3. Übungsblatt (22.4.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 29.4.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

Erinnerung an den Hodge-$*$-Operator: Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Auf $\Lambda^\bullet V$ wird das Skalarprodukt gewählt, für das $\Lambda^q \perp \Lambda^\ell V$ für $q \neq \ell$ und

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q \rangle = \det(\langle \alpha_j, \beta_\ell \rangle)_{j,\ell=1}^q$$

für alle $q \in \mathbf{N}$, 1-Formen α_j, β_j. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis und $d\mathrm{vol} := \mathrm{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{e}_\mathrm{n}$. Der *Hodge-Stern-Operator* $* \in \mathrm{End}\,(\Lambda^\bullet V)$ wird definiert durch

$$*(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_q}) = \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 & & j_n \end{pmatrix} \cdot e_{j_{q+1}} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}$$

für $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$. Für $\alpha, \beta \in \Lambda^\bullet V$ gilt $\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot d\mathrm{vol}$. Insbs. hängt $*$ nur von der Wahl von $d\mathrm{vol}$ mit $\|d\mathrm{vol}\|^2 = 1$ ab. Für jede q-Form α gilt $\langle * \alpha, \beta \rangle = (-1)^{q(n-q)} \langle \alpha, * \beta \rangle$. Auf den q-Formen ist $*^2 = (-1)^{q(n-q)}$.

Übung 3.1. *Zeigen Sie* $\forall X \in TM, \omega \in \Lambda^q T^* M : * \iota_X \omega = (-1)^{q-1} X^\flat \wedge * \omega$. *(15 Punkte)*

Übung 3.2. *Sei* $\dim M = n$. *Zeigen Sie* $d^* = (-1)^{nq+n+1} * d *$ *auf* $\mathfrak{A}^q(M)$ *mit dem Hodge-Stern-Operator* $*$. *(25 Punkte)*

Übung 3.3. *Beweisen Sie, dass die Divergenz von Killingfeldern verschwindet, in dem Sie allgemein* $\mathrm{div} X = -\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\,(L_X g)^\sharp$ *(mit* $(L_X g)^\sharp \in \mathrm{End}\, TM$*) zeigen.* *(20 Punkte)*

Übung 3.4. *Bestimmen Sie den Wärmeleitungskern des Operators* $H_{|x} := -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ *auf den reellwertigen Funktionen über* $M = \mathbf{R}$, *indem Sie den Ansatz*

$$p_t(x, y) = \exp\left(a_t \frac{x^2 + y^2}{2} + b_t xy + c_t \right)$$

mit $a, b, c : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ *versuchen und die resultierenden Differentialgleichungen für* a, b, c *lösen.* *(40 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html`