

Übungen zu Globaler Analysis II

(SoSe 2025)

4. Übungsblatt (29.4.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 6.5.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 4.1. Berechnen Sie das Symbol von $d + d^*$ auf $\Gamma(M, \sum_k \Lambda^k T^*M)$ und verifizieren Sie, dass $(d + d^*)^2$ ein verallgemeinerter Laplace-Operator ist. (15+15 Punkte)

Übung 4.2. Sei A derjenige Operator auf $L^2([0, 1])$ mit $(Af)(x) := x \cdot f(x)$.

- a) Zeigen Sie, dass A keine Eigenwerte hat.
- b) Finden Sie für $\lambda \in \mathbf{R} \setminus [0, 1]$ einen beschränkten Operator B mit $B \circ (A - \lambda) = \text{id}$.
- c) Beweisen Sie $\text{spec } A = [0, 1]$. (Tipp: Zeigen Sie, dass es keinen beschränkten Operator B mit $(A - \lambda)B = 1$ gibt.) (10+10+10 Punkte)

Übung 4.3. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die kanonische euklidische Metrik auf $\mathbf{R}^n$ und $q = -\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeigen Sie, dass

- a) $\text{Cl}(\mathbf{R}, q) \cong \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \not\cong \mathbf{C}$ (mit komponentenweiser Multiplikation auf $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$).
- b) $\text{Cl}(\mathbf{R}^2, q) \cong \mathbf{R}^{2 \times 2} \not\cong \mathbf{H}$.
- c) Identifizieren Sie $\text{Cl}(\mathbf{R}^2, q)$ für die quadratische Form $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := x^2 - y^2$ mit einer Algebra, die Sie schon kennen. (10+15+15 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html>