Übungen zu Globaler Analysis II
(SoSe 2025)
5. Übungsblatt (6.5.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 13.5.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 5.1. *Sei (V, q) ein Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $q \neq 0$. Beweisen Sie durch Abspalten eines 1-dimensionalen Unterraumes von V, dass der gerade Anteil der Cliffordalgebra $\mathrm{Cl}^+(V)$ wieder eine Cliffordalgebra ist.* *(30 Punkte)*

Übung 5.2. *Sei $(V, q) := (\mathbf{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $E := \mathbf{R}^{N+1}$ ein selbstadjungierter $\mathrm{Cl}(V)$-Modul. Für eine ONB $(e_j)_{j=1}^n$ von V definiere $X_j \in \Gamma(E, TE)$ durch*

$$X_{j|p} := c(e_j)p \qquad \forall 1 \leq j \leq n \ .$$

a) Zeigen Sie, dass X_j durch Einschränkung ein Vektorfeld $Y_j \in \Gamma(S^N, TS^N)$ liefert.

b) Beweisen Sie, dass die Vektorfelder $Y_1, \ldots, Y_n$ auf S^N an jedem Punkt linear unabhängig sind.

c) Zeigen Sie, dass die Y_j Vektorfelder auf $\mathbf{P}^N\mathbf{R}$ induzieren.

(10+15+10 Punkte)

Bem.: Die Klassifikation von Clifford-Moduln (bzw. **Spin***-Darstellungen) liefert auf diese Weise eine explizite Konstruktion eines maximalen trivialen Unterbündels von TS^N und $T\mathbf{P}^N\mathbf{R}$. Mit $N + 1 = 2^{4a+b}(2t + 1)$, $0 \leq b < 4$ hat es die Dimension $n = 8a + 2^b - 1$.*

Übung 5.3. *Berechnen Sie für $0 \leq j, k, l, m \leq n$ und eine ONB $(e_j)_{j=1}^n$ eines euklidischen Vektorraumes (V, q) explizit $[e_je_k, e_le_m]$ in der Liealgebra $c(\Lambda^2 V)$. Sei wie in der Vorlesung $\tau : c(\Lambda^2 V) \to \mathfrak{so}(V)$, $\tau(a)v := [a, v]$. Bestimmen Sie die Abbildung*

$$\mathfrak{so}(V) \xrightarrow{f} \Lambda^2 V \xrightarrow{c} c(\Lambda^2 V) \xrightarrow{\tau} \mathfrak{so}(V)$$

konkret (sie ist nicht die Identität). Dabei ist die erste Abbildung $f : A \mapsto q(A\cdot, \cdot)$. *(35 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html`