Übungen zu Globaler Analysis II

(SoSe 2025)

6. Übungsblatt (13.5.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 20.5.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 6.1. *Sei V ein or. n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, $n > 2$. Beweisen Sie, dass das Zentrum von* $\mathbf{Spin}$ *aus* $\mathbf{Spin} \cap \{\pm 1, \pm c(dvol)\}$ *besteht. Zu welcher Gruppe ist es isomorph?* *(25 Punkte)*

Übung 6.2. *Sei n ungerade und $\rho : \mathbf{Cl}_n \to \operatorname{End}(W)$ eine irreduzible Clifford-Darstellung. Zeigen Sie, dass entweder $\rho(\gamma) = 1$ oder $\rho(\gamma) = -1$. (Tipp: Z.B. mit Hilfe von Übung 6.1.)* *(25 Punkte)*

Übung 6.3. *Sei $\mathbf{Cl}_n$ die komplexifizierte Clifford-Algebra des $\mathbf{R}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt (welche also isomorph zu jeder komplexifizierten Clifford-Algebra eines n-dimensionalen reellen VR mit nicht-degeneriertem q ist).*

a) Berechnen Sie $\mathbf{Cl}_1$ und $\mathbf{Cl}_2$.

b) Zeigen Sie $\mathbf{Cl}_{n+2} = \mathbf{Cl}_n \otimes \mathbf{Cl}_2$ als ungraduierte Algebren. Tipp: Betten Sie dazu $\mathbf{R}^{n+2}$ in $\mathbf{Cl}_n \otimes \mathbf{Cl}_2$ ein mit

$$e_j \mapsto \begin{cases} ie_j \otimes e_{n+1}e_{n+2} & \text{falls } 1 \leq j \leq n \\ 1 \otimes e_j & \text{falls } j = n+1 \text{ oder } j = n+2 \ . \end{cases}$$

c) Folgern Sie $\mathbf{Cl}_{2n} \cong \operatorname{End}(\mathbf{C}^{2^n})$, $\mathbf{Cl}_{2n+1} \cong \operatorname{End}(\mathbf{C}^{2^n}) \oplus \operatorname{End}(\mathbf{C}^{2^n})$ als Algebren. *(15+25+10 Punkte)*

Bem.: Eine ähnliche Periodizität wie in (b) gibt es für reelle Clifford-Algebren, mit Periode 8 statt 2.

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html`